Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Dicembre 2023

Esercizio 1 Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = p_1^2 - p_2^2 + \frac{1}{q_1^2 - q_2^2},$$

con $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ e $q_1 > q_2$.

i) Determinare una trasformazione canonica[1]

$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \overset{\Psi}{\to} (\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}),$$

tale che le nuove coordinate $\boldsymbol{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K.

Esercizio 2

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)^2 + \varepsilon\big[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\big]$$

con $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$.

1. Mostrare che il sistema hamiltoniano associato ad H_ε è integrabile scrivendo due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione;
2. mostrare che il sistema hamiltoniano associato ad H_ε non soddisfa il principio della media al primo ordine in ε;
3. tramite il metodo di Lie, scrivere la forma normale risonante $\tilde{H}_\varepsilon$ di H_ε relativa alla risonanza singola definita da $k_* = (1, 1)$;
4. trovare la soluzione generale del sistema hamiltoniano associato alla funzione di Hamilton $\tilde{H}'_\varepsilon$, ottenuta cancellando da $\tilde{H}_\varepsilon$ i termini $O(\varepsilon^2)$.

[1] È utile ricordare le relazioni $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ e $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$.

Soluzioni

Esercizio 1

1. Consideriamo la seguente trasformazione puntuale:

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_2 \cosh Q_1, \\ q_2 &= Q_2 \sinh Q_1. \end{aligned}$$

Completiamola ad una trasformazione canonica

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \xrightarrow{\Psi} (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$$

cercando una opportuna funzione generatrice $S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P})$ come segue. Invertiamo la trasformazione puntuale per ottenere

$$\begin{aligned} Q_1 &= \operatorname{arctanh} \frac{q_2}{q_1}, \\ Q_2 &= \sqrt{q_1^2 - q_2^2}. \end{aligned}$$

Ponendo

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial P_1} = \operatorname{arctanh} \frac{q_2}{q_1}, \\ Q_2 &= \frac{\partial S}{\partial P_2} = \sqrt{q_1^2 - q_2^2}, \end{aligned}$$

si trova

$$S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = P_1 \operatorname{arctanh} \frac{q_2}{q_1} + P_2 \sqrt{q_1^2 - q_2^2},$$

che è una buona funzione generatrice, infatti

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial \boldsymbol{q} \partial \boldsymbol{P}} = -\frac{1}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2}} \neq 0.$$

Possiamo completare la trasformazione puntuale ad una trasformazione canonica con le relazioni

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{P_2 q_1}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2}} - \frac{P_1 q_2}{q_1^2 - q_2^2}, \\ p_2 &= \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{P_1 q_1}{q_1^2 - q_2^2} - \frac{P_2 q_2}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2}}, \end{aligned}$$

ovvero

$$p_1 = P_2 \cosh Q_1 - \frac{P_1}{Q_2} \sinh Q_1,$$
$$p_2 = \frac{P_1}{Q_2} \cosh Q_1 - P_2 \sinh Q_1.$$

La funzione hamiltoniana trasformata $K(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) = H \circ \Psi^{-1}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ diventa

$$K(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) = P_2^2 - \frac{P_1^2}{Q_2^2} + \frac{1}{Q_2^2}.$$

Notiamo che Q_1 è una variabile ciclica e che K è indipendente dal tempo. Introduciamo la funzione caratteristica di Hamilton

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 Q_1 + W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2),$$

e scriviamo l'equazione di Hamilton-Jacobi per la hamiltoniana K

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Q_2}\right)^2 - \frac{1}{Q_2^2}\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)^2 + \frac{1}{Q_2^2} = e(\alpha_1, \alpha_2),$$

che può essere scritta come un'equazione nella sola coordinata Q_2

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 - \frac{\alpha_1^2}{Q_2^2} + \frac{1}{Q_2^2} = \alpha_2, \tag{1}$$

dove abbiamo posto $e(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2$.

2. Per trovare un integrale completo

$$S(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) - \alpha_2 t$$

dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K dobbiamo determinare W_2. Dall'equazione (1) possiamo scrivere

$$\frac{\partial W_2}{\partial Q_2} = \sqrt{\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2 - 1}{Q_2^2}}.$$

Integrando, si ottiene

$$W_2 = \int \sqrt{\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2 - 1}{Q_2^2}}\, dQ_2 = \int \frac{\sqrt{\alpha_2 Q_2^2 + \alpha_1^2 - 1}}{Q_2}\, dQ_2,$$

e dopo qualche conto (per esempio, si può effettuare il seguente cambio di variabile: $z = \sqrt{\alpha_2 Q_2^2 + \alpha_1^2 - 1}$) si trova (a meno di termini costanti additivi)

$$W_2 = \sqrt{\alpha_2 Q_2^2 + \alpha_1^2 - 1} - \sqrt{\alpha_1^2 - 1}\,\mathrm{arctanh}\sqrt{1 + \frac{\alpha_2 Q_2^2}{\alpha_1^2 - 1}}.$$

L'integrale richiesto è

$$S = \alpha_1 Q_1 + \sqrt{\alpha_2 Q_2^2 + \alpha_1^2 - 1} - \sqrt{\alpha_1^2 - 1}\,\mathrm{arctanh}\sqrt{1 + \frac{\alpha_2 Q_2^2}{\alpha_1^2 - 1}} - \alpha_2 t.$$

Esercizio 2

1. La hamiltoniana $H_\varepsilon(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi})$ è un integrale primo del sistema di equazioni di Hamilton

$$\begin{aligned}
\dot{I}_1 &= \varepsilon[\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],\\
\dot{I}_2 &= \varepsilon[\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],\\
\dot{\varphi}_1 &= I_1 - I_2,\\
\dot{\varphi}_2 &= I_2 - I_1.
\end{aligned}$$

Dalle ultime due equazioni si vede che anche

$$F(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \varphi_1 + \varphi_2$$

è un integrale primo di questo sistema. Le funzioni H_ε ed F sono genericamente indipendenti, infatti

$$\frac{\partial(H_\varepsilon, F)}{\partial(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi})} = \begin{pmatrix} (I_1 - I_2) & (I_2 - I_1) & -\varepsilon[\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] & -\varepsilon[\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Queste funzioni sono anche in involuzione perché F è un integrale primo del sistema Hamiltoniano associato ad H_ε.

2. Si ha

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 2\varepsilon \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

da cui

$$I_1(t) + I_2(t) = 2\varepsilon t \sin(\varphi_1^0 + \varphi_2^0) + I_1^0 + I_2^0.$$

Inoltre

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 2\varepsilon \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Ponendo

$$\vartheta = \varphi_1 - \varphi_2, \quad S = I_1 + I_2, \quad D = I_1 - I_2$$

si ha

$$\ddot{\vartheta} = 2\dot{D} = 4\varepsilon \sin\vartheta,$$

quindi D compie oscillazioni di ordine $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. In compenso

$$S(t) = S(0) + 2\varepsilon t \sin(\varphi_1^0 + \varphi_2^0).$$

3. La forma normale risonante è

$$\tilde{H}_\varepsilon = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)^2 + \varepsilon\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

4. Le equazioni di Hamilton associate a

$$\tilde{H}'_\varepsilon = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)^2 + \varepsilon\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

sono

$$\begin{aligned}
\dot{I}_1 &= \varepsilon\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\\
\dot{I}_2 &= \varepsilon\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\\
\dot{\varphi}_1 &= I_1 - I_2,\\
\dot{\varphi}_2 &= I_2 - I_1,
\end{aligned}$$

da cui

$$\varphi_1(t) + \varphi_2(t) = \varphi_1^0 + \varphi_2^0$$

quindi

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= I_1^0 + \varepsilon t\sin(\varphi_1^0 + \varphi_2^0),\\
I_2(t) &= I_2^0 + \varepsilon t\sin(\varphi_1^0 + \varphi_2^0).
\end{aligned}$$

Si ottiene dunque che

$$\varphi_1(t) = \varphi_1^0 + t(I_1^0 - I_2^0), \qquad \varphi_2(t) = \varphi_2^0 + t(I_2^0 - I_1^0).$$