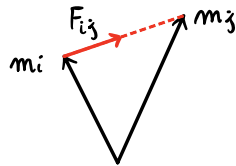


PROBLEMA GRAVITAZIONALE DEGLI $N+1$ CORPI

$$m_i, x_i \in \mathbb{R}^3, \dot{x}_i \in \mathbb{R}^3, i = 0, \dots, N$$

$$F_{ij} = \frac{G m_i m_j}{x_{ij}^3} (x_j - x_i) \quad x_{ij} = |x_j - x_i|$$



$$F_{ij} + F_{ji} = 0$$

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{x_{ij}^3} (x_j - x_i) \quad i = 0, \dots, N$$

Osservazione: per il principio di equivalenza di Einstein le masse inerziali sono uguali alle masse gravitazionali

$$\ddot{x}_i = \frac{G m_i m_j}{x_{ij}^3} (x_j - x_i)$$

$$j=0 \quad \text{Sole}$$

$$j=1, \dots, N \quad \text{pianeti e corpi minori}$$

$$N = N' + N'' \quad \begin{array}{l} \downarrow \text{pianeti} \\ \text{corpi minori} \end{array}$$

$$N' + N'' + 1 \quad \text{equazioni}$$

$$m_0 \gg m_j \quad (j=1, \dots, N') \quad m_j \gg m_k \quad (k=N'+1, \dots, N'+N''+1)$$

INTEGRALI PRIMI

Per $N > 1$ esistono 10 integrali primi indipendenti: 3 quantità vettoriali e una scalare

Osserviamo che

$$\sum_{i=0}^N m_i \ddot{x}_i = \sum_{0 \leq i < j \leq N} F_{ij} + F_{ji} = 0$$

introduciamo la massa totale $M_0 = \sum_{i=0}^N m_i$

Integrando si ha

$$\sum_{i=0}^N m_i \dot{x}_i = M_0 \dot{b}_0 \quad \text{dove } \dot{b}_0 \text{ è la velocità del centro di massa}$$

$$\sum_{i=0}^N m_i x_i = M_0 \dot{b}_0 t + M_0 b_0(0)$$

Due vettori $\dot{b}_0$ e $b_0(0)$ sono chiamati integrali del centro di massa

$b_0(0)$ è la posizione del centro di massa al tempo $t=0$

$$b_0(0) = -\dot{b}_0 t + \frac{1}{M_0} \sum_{i=0}^N m_i x_i$$

$$\dot{b}_0 = \frac{1}{M_0} \sum_{i=0}^N m_i \dot{x}_i$$

Calcoliamo il momento delle forze rispetto all'origine del sistema di riferimento

$$\sum_{i=0}^N x_i \times \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{x_{ij}^3} (x_j - x_i) =$$

$$\sum_{0 \leq i < j \leq N} x_i \times \left[\frac{G m_i m_j}{x_{ij}^3} (x_j - x_i) \right] + x_j \times \left[\frac{G m_i m_j}{x_{ji}^3} (x_i - x_j) \right] =$$

$$\sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{x_{ij}^3} [x_i \times (x_j - x_i) + x_j \times (x_i - x_j)] =$$

$$\sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{x_{ij}^3} [(x_j - x_i) \times (x_i - x_j)] = 0$$

Segue che

$$\sum_{i=0}^N x_i \times (m_i \ddot{x}_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^N x_i \times (m_i \ddot{x}_i) = \sum_{i=0}^N \frac{d}{dt} (x_i \times m_i \dot{x}_i) = 0$$

$$C = \sum_{i=0}^N x_i \times m_i \dot{x}_i \quad \text{è un integrale primo e corrisponde al momento angolare totale}$$

Ora consideriamo

$$\sum_{i=0}^N \dot{x}_i \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{x_{ij}^3} (x_j - x_i) =$$

$$\sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{x_{ij}^3} [\dot{x}_i \cdot (x_j - x_i) + \dot{x}_j \cdot (x_i - x_j)] =$$

$$\sum_{0 \leq i < j \leq N} - \frac{G m_i m_j}{x_{ij}^3} \left[(x_j - x_i) \cdot \frac{d}{dt} (x_j - x_i) \right] =$$

$$\sum_{0 \leq i < j \leq N} - \frac{G m_i m_j}{2 x_{ij}^3} \frac{d}{dt} |x_j - x_i|^2 = \sum_{0 \leq i < j \leq N} - \frac{G m_i m_j}{x_{ij}^2} \dot{x}_{ij}$$

Si vede che

$$\sum_{0 \leq i < j \leq N} - \frac{G m_i m_j}{x_{ij}^2} \dot{x}_{ij} = \frac{dU(x)}{dt}, \quad x \in \mathbb{R}^{3N+3}$$

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_N)$$

con $U(x)$ potenziale gravitazionale

$$U(x) = \sum_{0 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{x_{ij}}$$

Inoltre

$$\sum_{i=0}^N (m_i \ddot{x}_i) \cdot \dot{x}_i = \frac{dT(\dot{x})}{dt}$$

con $T(\dot{x})$ energia cinetica

$$T(\dot{x}) = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^N \frac{m_i |\dot{x}_i|^2}{2}$$

Allora l'energia meccanica è un integrale primo

$$E(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - U(x)$$

FORMULAZIONE LAGRANGIANA

Lagrangiana

$$L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) + U(x)$$

Introduciamo i momenti attraverso la trasformazione di Legendre

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i \quad (\text{quantità di moto})$$

$$\dot{p}_i = m_i \ddot{x}_i = \nabla_{x_i} U$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N \right\}$$

Mostriamo che L è invariante rispetto ad un particolare gruppo di simmetrie, ovvero le isometrie dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$. Già

$R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una mappa lineare data da

$$y \longrightarrow Ay + d$$

con $A \in O(3)$ e $d \in \mathbb{R}^3$ costanti

Se R è applicata alle posizioni di tutti i punti e la mappa

$$\dot{y} \longrightarrow A\dot{y}$$

a tutte le velocità, allora

$$L(x_0, \dots, x_N, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_N) = L(Ax_0 + d, \dots, Ax_N + d, A\dot{x}_0, \dots, A\dot{x}_N)$$

Definizione

Un gruppo di simmetrie ad un parametro di L è un diffeomorfismo F^s delle posizioni $x = (x_0, \dots, x_N)$ che dipende (in modo differenziabile) da $s \in \mathbb{R}$, tale che

$$i) \quad F^s \circ F^z = F^{s+z}$$

$$ii) \quad F^0 \text{ è l'identità}$$

$$iii) \quad F^{-s} = (F^s)^{-1}$$

Inoltre, la lagrangiana è invariante

$$iv) \quad L\left(F^s(x), \frac{dF^s(x)}{dt}\right) = L\left(F^s(x), \frac{\partial F^s(x)}{\partial x} \dot{x}\right) = L(x, \dot{x})$$

Assumiamo che le derivate $\frac{\partial^2 F^s}{\partial x \partial s}$ siano continue

Definizione

Un gruppo locale di simmetrie ad un parametro di L ha le stesse proprietà i) - iv) in un intorno di 0 per s

Definizione

Un integrale primo delle equazioni di Lagrange

$$\ddot{y} = f(y), \quad y = (x, v)$$

con $\dot{x} = v$ è una funzione $I(y) \in C^1$ tale che la sua derivata temporale lungo il campo vettoriale $f(y)$ sia nulla

$$\frac{dI}{dt} = \nabla_y I \cdot f(y) = 0$$

Teorema di Noether

Se L è invariante rispetto ad un gruppo locale di simmetrie ad un parametro F^s allora

$$I(x, \dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \underbrace{\frac{\partial F^s(x)}{\partial s}}_{s=0}$$

generatore infinitesimo
dell'azione di $F^s(x)$

è un integrale primo.

Dimostrazione

$$L\left(F^s(x), \frac{dF^s(x)}{dt}\right) = L(x, \dot{x}) +$$

$$s \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) \cdot \frac{\partial F^s(x)}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \frac{dF^s(x)}{dt} \Big|_{s=0} \right) + \mathcal{O}(s^2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial F^s(x)}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^s(x)}{\partial s} \right) \Big|_{s=0} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial F^s(x)}{\partial s} \right) \Big|_{s=0} = 0 \quad \square$$

Applichiamo il teorema di Noether ai sottogruppi ad un parametro che generano il gruppo delle isometrie lineari

Traslazioni lungo un asse fisso

$$F^s(x_i) = x_i + s e_h \quad h = 1, 2, 3$$

$$F^s(x) = (x_0 + s e_h, \dots, x_N + s e_h)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_0 \dot{x}_0, \dots, m_N \dot{x}_N)$$

$$\frac{\partial F^s(x)}{\partial s} \Big|_{s=0} = (e_h, \dots, e_h)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial F^s(x)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \left(\sum_{i=0}^N m_i \dot{x}_i \right) \cdot e_h = P \cdot e_h$$

dove P è il momento lineare (quantità di moto) totale

$$P = M_0 \dot{b}_0 \rightarrow \dot{b}_0 = \frac{1}{M_0} \sum_{i=0}^N m_i \dot{x}_i$$

$\dot{b}_0$ e $b_0(0)$ sono integrali primi

Rotazioni attorno ad un asse fisso

$$F^s(x_i) = R_{e_h}^s x_i$$

$R_{e_h}^s$ è una matrice di rotazione di s radianti attorno all'asse associato ad e_h

$$F^s(x) = (R_{e_h}^s x_0, \dots, R_{e_h}^s x_N)$$

$$\frac{\partial F^s(x)}{\partial s} \Big|_{s=0} = (E_h x_0, \dots, E_h x_N) = (e_h \times x_0, \dots, e_h \times x_N)$$

dove E_k è la matrice antisimmetrica associata ad e_k

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Infatti

$$\frac{dR_{e_k}^s}{ds} = E_k R_{e_k}^s, \quad R_{e_k}^0 = I$$

$$\rightarrow R_{e_k}^s = \exp(s E_k)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial F^s(x)}{\partial s} \right|_{s=0} = \sum_{i=0}^N m_i \dot{x}_i \cdot (e_k \times x_i)$$

$$= e_k \cdot \sum_{i=0}^N x_i \times (m_i \dot{x}_i) = e_k \cdot c$$

dove c è il momento angolare totale

Il decimo integrale primo è l'energia che può essere spiegato con l'invarianza della lagrangiana rispetto a traslazioni temporali. Ulteriormente la trasformata di Legendre possiamo introdurre la funzione hamiltoniana

$$H(p_0, \dots, p_N, x_0, \dots, x_N) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x} - L \right)_{\dot{x} = \dot{x}(p)} =$$

$$\sum_{i=0}^N m_i \frac{|p_i|^2}{m_i^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \frac{|p_i|^2}{m_i^2} - U(x)$$

$$H(p, x) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \frac{|p_i|^2}{m_i^2} - U(x) \quad \text{con } p = (p_0, \dots, p_N)$$

Osservazione: le coppie di variabili $(c_k, \varphi), (P_k, s)$

(con $c_k = c \cdot e_k$, $P_k = P \cdot e_k$, φ angolo di rotazione attorno

all'asse associato ad e_h , s traslazione lungo l'asse associato ad e_h) possono essere considerate come variabili coniugate. Il flusso integrale delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana C_h e P_h e con variabile indipendente φ ed s , rispettivamente, fornisce l'azione del gruppo di simmetrie ad un parametro associato a C_h e P_h

1) (C_h, φ)

$$C_h = \left(\sum_{i=0}^N m_i x_i \times \dot{x}_i \right) \cdot e_h = \left(\sum_{i=0}^N x_i \times p_i \right) \cdot e_h$$

$$\sum_{i=0}^N x_i \cdot (p_i \times e_h) = \sum_{i=0}^N p_i \cdot (e_h \times x_i)$$

$$\begin{cases} \frac{dp_k}{d\varphi} = -\frac{\partial C_h}{\partial x_k} = -p_k \times e_h = e_h \times p_k = E_h p_k \\ \frac{dx_k}{d\varphi} = \frac{\partial C_h}{\partial p_k} = e_h \times x_k = E_h x_k \end{cases} \quad k = 1, \dots, N$$

$$p_k(\varphi) = R_{e_h}^\varphi p_k(0), \quad x_k(\varphi) = R_{e_h}^\varphi(\varphi) x_k(0)$$

2) (P_h, s)

$$P_h = \sum_{i=0}^N m_i \dot{x}_i \cdot e_h = \sum_{i=0}^N p_i \cdot e_h$$

$$\begin{cases} \frac{dp_k}{ds} = -\frac{\partial P_h}{\partial x_k} = 0 \\ \frac{dx_k}{ds} = \frac{\partial P_h}{\partial p_k} = e_h \end{cases} \quad k = 1, \dots, N$$

$$p_k(s) = p_k(0), \quad x_k(s) = x_k(0) + s e_h$$

Infine, il flusso delle equazioni di Hamilton per H con variabile indipendente il tempo t rappresenta una traslazione nel tempo dello stato ad un istante iniziale

$$(p(t), q(t)) = \Phi^t(p(0), q(0))$$

CAMBI DI COORDINATE

Possono portare ad una riduzione della dimensionalità del problema

Consideriamo un diffeomorfismo di classe C^2

$$\phi: y \rightarrow x, \quad x \in \mathbb{R}^{3N+3}, \quad y \in \mathbb{R}^{3N'+3}$$

$$x = (x_0, \dots, x_N), \quad x_i \in \mathbb{R}^3$$

$$y = (y_0, \dots, y_{N'}), \quad y_i \in \mathbb{R}^3$$

Abbiamo

$$A(y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(y) \quad \text{invertibile in ogni } y$$

$$\dot{x} = A(y) \dot{y}$$

Introduciamo

$$\psi: (x, \dot{x}) \rightarrow (y, \dot{y}) = (g(x), A^{-1}(g(x))\dot{x})$$

$$\text{con } g = \phi^{-1}$$

la lagrangiana $L(x, \dot{x})$ e la funzione

$$\mathcal{L}(y, \dot{y}) = L \circ \psi^{-1}(y, \dot{y}) = L(\phi(y), A(y)\dot{y})$$

Calcoliamo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \circ \psi^{-1} \right) A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \circ \psi^{-1} \left[\frac{\partial A}{\partial y_0} \dot{y} \mid \cdots \mid \frac{\partial A}{\partial y_{3N'+2}} \dot{y} \right] \quad (1)$$

dove $y = (\underbrace{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{3N'}}_{\text{componenti di } y_0}, \underbrace{y_{3N'+1}, y_{3N'+2}}_{\text{componenti di } y_{3N'}})$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \circ \psi^{-1} \right) A \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \circ \psi^{-1} \right) A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \circ \psi^{-1} \sum_{i=0}^{3N'+2} \frac{\partial A}{\partial y_i} \dot{y}_i \quad (2)$$

Si può notare che le matrici (1) e (2) sono uguali, infatti
elemento (h, k) di (1)

$$\sum_{i=0}^{3N'+2} \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_k} \dot{y}_i = \sum_{i=0}^{3N'+2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_h}{\partial y_k \partial y_i} \dot{y}_i \quad \text{con } a_{hi} = \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial y_i}$$

elemento (h, k) di (2)

$$\sum_{i=0}^{3N'+2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial y_i} \dot{y}_i = \sum_{i=0}^{3N'+2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_h}{\partial y_i \partial y_k} \dot{y}_i \quad \text{con } a_{hk} = \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial y_k}$$

Segue che le equazioni di Lagrange nei due sistemi di coordinate sono equivalenti

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right) \circ \psi^{-1} A$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}}_{(b)} = 0 \iff \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}}_{(a)} = 0$$

Soluzioni $x(t)$ di (a) sono trasformate in soluzioni

$y(t) = g(x(t))$ di (b) e viceversa, soluzioni $y(t)$ di (b)

sono trasformate in soluzioni $x(t) = f(y(t))$ di (a)

PROBLEMA DEI DUE CORPI

Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} m_0 |\dot{x}_0|^2 + \frac{1}{2} m_1 |\dot{x}_1|^2 + \frac{G m_0 m_1}{|x_1 - x_0|}$$

Introduciamo

$$y_0 = \frac{1}{M_0} (m_0 x_0 + m_1 x_1) \quad y_1 = x_1 - x_0$$

da cui

$$x_1 = y_1 + x_0 \quad M_0 y_0 = m_0 x_0 + m_1 y_1 + m_1 x_0$$

$$x_0 = y_0 - \frac{m_1}{M_0} y_1$$

$$x_1 = y_0 + \frac{m_0}{M_0} y_1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_0 |\dot{x}_0|^2 + \frac{1}{2} m_1 |\dot{x}_1|^2 &= \frac{1}{2} m_0 \left(|\dot{y}_0|^2 + \frac{m_1^2}{M_0^2} |\dot{y}_1|^2 - \frac{2 m_1}{M_0} \dot{y}_0 \cdot \dot{y}_1 \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} m_0 \left(|\dot{y}_0|^2 + \frac{m_0^2}{M_0^2} |\dot{y}_1|^2 + \frac{2 m_0}{M_0} \dot{y}_0 \cdot \dot{y}_1 \right) \\ &= \frac{1}{2} M_0 |\dot{y}_0|^2 + \frac{1}{2} M_1 |\dot{y}_1|^2 \end{aligned}$$

$$\text{con } M_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \quad \text{massa ridotta}$$

$$\mathcal{L}(y_0, y_1, \dot{y}_0, \dot{y}_1) = \frac{1}{2} M_0 |\dot{y}_0|^2 + \frac{1}{2} M_1 |\dot{y}_1|^2 + \frac{G M_0 M_1}{|y_1|}$$

Allora $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ con

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} M_0 |\dot{y}_0|^2 \quad \mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} M_1 |\dot{y}_1|^2 + \frac{G M_0 M_1}{|y_1|}$$

e le equazioni di Lagrange sono

$$M_0 \ddot{y}_0 = 0$$

$$M_1 \ddot{y}_1 = - \frac{G M_0 M_1}{|y_1|^3} y_1$$

problema di
Keplero

Vettore momento angolare

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{x}_0 \times (m_0 \dot{\mathbf{x}}_0) + \mathbf{x}_1 \times (m_1 \dot{\mathbf{x}}_1) \\ &= \mathbf{y}_0 \times (M_0 \dot{\mathbf{y}}_0) + \mathbf{y}_1 \times (M_1 \dot{\mathbf{y}}_1) = M_0 \mathbf{c}_0 + M_1 \mathbf{c}_1 \end{aligned}$$

$$\text{con } \mathbf{c}_0 = \mathbf{y}_0 \times \dot{\mathbf{y}}_0, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{y}_1 \times \dot{\mathbf{y}}_1$$

$$\mathbf{c}_0 = (\dot{\mathbf{y}}_0 t + \mathbf{y}_0(0)) \times \dot{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{y}_0(0) \times \dot{\mathbf{y}}_0 = \text{cost.}$$

→ $\mathbf{c}_1$ è costante

Vettore di Laplace - Lenz

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{y}}_1 \times \mathbf{c}_1 - GM_0 \frac{\mathbf{y}_1}{|\mathbf{y}_1|}$$

Introduciamo la base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{y}_1}{|\mathbf{y}_1|} \quad \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r \quad \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{c}_1}{|\mathbf{c}_1|}$$

$$\mathbf{y}_1 = \rho \mathbf{e}_r, \quad \dot{\mathbf{y}}_1 = \dot{\rho} \mathbf{e}_r + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{c}_1 = \rho^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z$$

verifichiamo che $\mathbf{L}$ è un integrale primo

$$\dot{\mathbf{L}} = \ddot{\mathbf{y}}_1 \times \mathbf{c}_1 - GM_0 \dot{\mathbf{e}}_r, \quad \ddot{\mathbf{y}}_1 = -\frac{GM_0}{\rho^3} \mathbf{y}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_r = \mathbf{e}_\theta \dot{\theta}$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{L}} = -\frac{GM_0}{\rho^3} \mathbf{y}_1 \times (\rho^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z) - GM_0 \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = 0$$

Introduciamo l'anomalia vera ϕ e l'eccentricità e

$$\frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_r}{GM_0} = e \cos \phi = \left(\frac{1}{GM_0} \dot{\mathbf{y}}_1 \times \mathbf{c}_1 - \mathbf{e}_r \right) \cdot \mathbf{e}_r$$

$$\dot{\mathbf{y}}_1 \times \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{e}_r = \dot{\mathbf{y}}_1 \cdot (\rho^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = \rho^3 \dot{\theta}^2$$

$$e \cos \phi = \frac{1}{GM_0} (\rho^3 \dot{\theta}^2) - 1 \quad \text{pongo } h = \rho^2 \dot{\theta}^2$$

$$\text{Equazione polare della traiettoria } \rho(\phi) = \frac{h^2/GM_0}{1 + e \cos \phi}$$

ρ assume il suo valore minimo per $\varphi = 0$

$$q = \rho(0) = \frac{h^2}{GM_0(1+e)}$$

Il punto della traiettoria che realizza questo valore si chiama pericentro. Segue che il vettore di Laplace-Lenz applicato in M_0 punta verso il pericentro.

Energia

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_0 |\dot{x}_0|^2 + \frac{1}{2} m_1 |\dot{x}_1|^2 - \frac{GM_0 m_1}{|x_1 - x_0|} \\ &= \frac{1}{2} M_0 |\dot{y}_0|^2 + \frac{1}{2} M_1 |\dot{y}_1|^2 - \frac{GM_0 M_1}{|y_1|} \\ &= M_0 E_0 + M_1 E_1 \end{aligned}$$

con

$$E_0 = \frac{1}{2} |\dot{y}_0|^2 \quad E_1 = \frac{1}{2} |\dot{y}_1|^2 - \frac{GM_0}{|y_1|} = \frac{1}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \frac{h^2}{\rho^2} \right) - \frac{GM_0}{\rho}$$

Vediamo che vale questa relazione tra e , h , E_1

$$e^2 = 1 + \frac{2E_1 h^2}{(GM_0)^2}$$

$$\begin{aligned} e^2 &= \left| \frac{1}{GM_0} \underbrace{\dot{y}_1 \times c_1}_{\dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\theta} e_\theta} - \frac{y_1}{|y_1|} \right|^2 \\ &= (\dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\theta} e_\theta) \times (\rho^2 \dot{\theta} e_\theta) = -\rho^2 \dot{\rho} \dot{\theta} e_\theta + \rho^3 \dot{\theta}^2 e_\rho \\ &= -h \dot{\rho} e_\theta + \frac{h^2}{\rho} e_\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^2 &= \left(1 - \frac{h^2}{GM_0 \rho} \right)^2 + \frac{h^2 \dot{\rho}^2}{(GM_0)^2} = 1 + \frac{h^2}{(GM_0)^2} \underbrace{\left(\dot{\rho}^2 + \frac{h^2}{\rho^2} \right)}_{2E_1} - 2 \frac{h^2}{GM_0 \rho} \\ &= 2E_1 + \frac{2GM_0}{\rho} \end{aligned}$$

Se assumiamo che $e < 1$ allora $\rho(\varphi)$ è limitata. Il suo valore massimo

$$Q = \rho(\pi) = \frac{h^2}{GM_0(1-e)}$$

è assunto in corrispondenza di un punto chiamato apocentro.

Dalla relazione $a = \frac{Q+Q}{2}$, si ottiene

$$a = \frac{h^2/GM_0}{1-e^2} \longrightarrow h^2 = GM_0 a (1-e^2) \bullet$$

Il semi-asse maggiore a è funzione dell'energia E_1 . Dalla relazione $\bullet$ sostituendo $\bullet$ si ottiene

$$a = - \frac{GM_0}{2E_1}$$

Il periodo orbitale è dato da $T = \frac{\pi a b}{\alpha}$ con

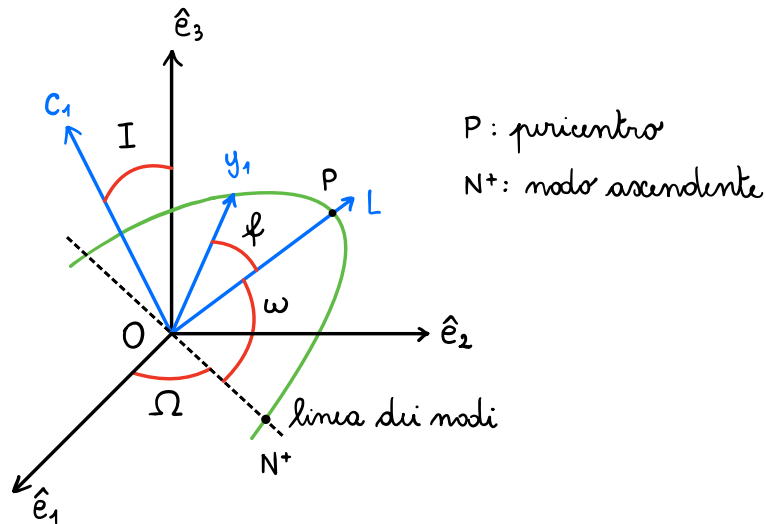
$b = a\sqrt{1-e^2}$ (semiasse minore) e $\alpha = \frac{h}{2}$ (velocità areolare)

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{h^2/4} = \frac{4\pi^2 a^4 (1-e^2)}{GM_0 a (1-e^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_0}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_0}}$$

Chiamiamo moto medio la quantità $n = \sqrt{\frac{GM_0}{a^3}}$

Introduciamo gli elementi orbitali I (inclinazione), ω (argomento del pericentro), Ω (longitudine del nodo ascendente)



$\Sigma = \{O; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ $O\hat{e}_1\hat{e}_2$ individua un piano di riferimento (per esempio il piano dell'eclittica)

$O\hat{e}_1$ individua una direzione di riferimento (per esempio l'intersezione del piano dell'eclittica con il piano equatoriale terrestre ad una certa epoca)

$$\Sigma = \{O; \hat{e}, \hat{p}, \hat{c}_1\} \quad \text{con } \hat{e} = \frac{L}{|L|}, \quad \hat{c}_1 = \frac{c_1}{|c_1|}, \quad \hat{p} = \hat{c}_1 \times \hat{e}$$

Vettore posizione in Σ'

$$y_1|_{\Sigma'} = \rho(\phi) (\cos \phi, \sin \phi, 0)^T$$

Vettore posizione in Σ

$$y_1|_{\Sigma} = R(I, \Omega, \omega) y_1|_{\Sigma'}$$

con

$$R(I, \Omega, \omega) = R_3(\Omega) R_1(I) R_3(\omega)$$

e

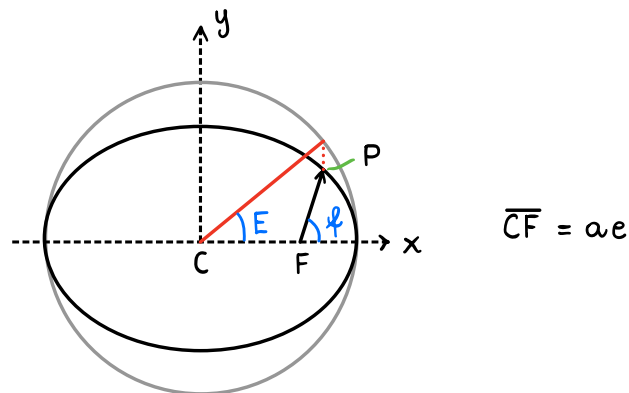
$$R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Anomalia media : $M = n(t - \tau)$

τ è una funzione lineare del tempo, con τ tempo di passaggio al perielio

Anomalia eccentrica



$$\begin{cases} x_p = a \cos E \\ y_p = a \sqrt{1-e^2} \sin E = \rho \sin \phi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{(ae + x_p)^2 + y_p^2} = a(1 - e \cos E)$$

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$$

$$\rho \cos \phi = a \cos E - ae$$

$$\cos \phi = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

Equazione di Keplero

Mostriamo che $\frac{dE}{dt} = \frac{na}{p}$, partiamo da

$$(p =) \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} = a(1-e\cos E)$$

deriviamo rispetto ad f

$$\underbrace{- \frac{(1-e^2)(-e\sin f)}{(1-e^2)^2 a^2}}_{= \frac{e\sin f}{a^2(1-e^2)}} p^2 = e\sin E \frac{dE}{df}$$
$$= \frac{e\sin f}{a^2(1-e^2)} p^2 = \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin E}{a^2(1-e^2)} ep$$

$$\frac{dE}{df} = \frac{p}{a\sqrt{1-e^2}}, \text{ inoltre si è visto che } \frac{df}{dt} = \frac{h}{p^2}$$

allora

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{df} \frac{df}{dt} = \frac{h}{pa\sqrt{1-e^2}} \uparrow \sqrt{\frac{GM_0}{a}} \frac{1}{p} = \frac{na}{p}$$
$$h = \sqrt{GM_0 a(1-e^2)}$$

Separando le variabili,

$$p(E) dE = na dt$$

$$(1-e\cos E) dE = na dt$$

ed integrando da $t = \tau$ ($E = 0$) a t generico si

ottiene l'equazione di Keplero

$$n(t-\tau) = E - e\sin E$$

Si può trovare una soluzione data da una serie di potenze nell'eccentricità che diverge per $e \gtrsim 0.6627434$

$E - M = e \sin E$ è una funzione periodica
dispari

$$e \sin E = \sum_{s=1}^{\infty} b_s(e) \sin sM$$

$$\begin{aligned} \text{dove } b_s(e) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e \sin E(M) \sin sM dM = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e \sin E(M) \sin sM dM = \end{aligned}$$

$$- \frac{2e}{\pi s} \cos sM \sin E(M) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi s} \int_0^{\pi} \cos sM \underbrace{d(e \sin E)}_{d(E-M)} =$$

$$- \frac{2}{\pi s} \int_0^{\pi} \cos sM dM + \frac{2}{\pi s} \int_0^{\pi} \cos [s(E - e \sin E)] dE$$

$$b_s(e) = \frac{2}{s} J_s(se) \quad \text{dove}$$

$$J_s(se) = \frac{2}{\pi s} \int_0^{\pi} \cos [s(E - e \sin E)] dE$$

è la funzione di Bessel del primo tipo. Per $s > 0$ si ha

$$J_s(x) = \frac{1}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \frac{(x/2)^{2\beta}}{\beta! (s+1)(s+2) \dots (s+\beta)}$$

questa serie è assolutamente convergente per tutti i valori
di x .

La soluzione dell'equazione di Keplero diventa

$$\begin{aligned}
 E &= M + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} J_s(se) \sin sM \\
 &= M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + O(e^3)
 \end{aligned}$$

Questa soluzione verrà impiegata nell'espansione della funzione perturbatrice, così come serviranno le espansioni di p/a , $\sin f$, $\cos f$ riportate per esempio nella sezione 2.5 del libro "Solar System Dynamics" di Murray & Dermott.

TRASFORMAZIONI di COORDINATE

Consideriamo trasformazioni di coordinate lineari del tipo

$$y_i = \sum_{j=0}^N a_{ij} x_j, \quad i = 0, \dots, N$$

con $A = (a_{ij})$ funzione solo delle masse. Vogliamo sfruttare gli integrali del centro di massa per ridurre il numero di equazioni, generalizzando i risultati del problema dei due corpi.

Una scelta naturale è

$$y_0 = \frac{1}{M_0} \sum_{j=0}^N m_j x_j$$

$$\rightarrow a_{0j} = \frac{m_j}{M_0}, \quad j = 0, \dots, N$$

Coordinate baricentriche

Poniamo $y_0 = 0$: l'origine del sistema di riferimento

è posta nel centro di massa.

Posizioni baricentriche dei pianeti

$$y_i = x_i - y_0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\rightarrow a_{ij} = d_{ij} - \frac{m_j}{M_0}, \quad j = 0, \dots, N$$

Posizione baricentrica del Sole ($i = 0$)

$$s = x_0 - y_0$$

s è funzione delle posizioni $y_1, \dots, y_N$, infatti

$$m_0 s + \sum_{j=1}^N m_j y_j = 0$$

$$s = -\frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^N m_j y_j$$

Equazioni del moto: partiamo da

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{|x_j - x_i|^3} (x_j - x_i), \quad i = 0, \dots, N$$

per scrivere ($i = 1, \dots, N$)

$$m_i \ddot{y}_i = \frac{G m_i m_0}{|s - y_i|^3} (s - y_i) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{|y_j - y_i|^3} (y_j - y_i)$$

e

$$m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U(s, y_1, \dots, y_N)}{\partial y_i}$$

con

$$U = \sum_{j=1}^N \frac{G m_0 m_j}{|y_j - s|} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{|y_j - y_i|}$$

Le derivate parziali di U rispetto a y_i devono essere calcolate considerando s indipendente dagli y_i

Coordinate eliocentriche

L'origine del sistema di riferimento è il Sole

$$y_i = x_i - x_0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{per } j=0, i=1, \dots, N \\ \delta_{ij} & \text{per } i, j=1, \dots, N \end{cases}$$

Usiamo la notazione r_i per indicare y_i .

Equazioni del moto

$$m_i \ddot{r}_i = -m_i \ddot{x}_0 + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{|x_j - x_i|^3} (x_j - x_i),$$

$$m_i \ddot{r}_i = -m_i \ddot{x}_0 - \frac{G m_i m_0}{|r_i|^3} r_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{|x_j - x_i|^3} (x_j - x_i),$$

inoltre possiamo scrivere

$$m_0 \ddot{x}_0 = \sum_{j=1}^N \frac{G m_0 m_j}{|r_j|^3} r_j = \frac{G m_0 m_i}{|r_i|^3} r_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_0 m_j}{|r_j|^3} r_j$$

Si ottiene

$$\bullet \quad \ddot{r}_i = \underbrace{- \frac{G(m_0 + m_i)}{|r_i|^3} r_i}_{\text{termine di Keplero}} + \overbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_j}{|r_j - r_i|^3} (r_j - r_i)}^{\text{termine diretto}} -$$

$$- \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_j}{|r_j|^3} r_j}_{\text{termine indiretto}}$$

Posizione del Sole

$$\sum_{i=0}^N m_i x_i = m_0 x_0 + \sum_{i=1}^N m_i (x_0 + r_i) = M_0 y_0$$

$$M_0 x_0 = M_0 y_0 - \sum_{i=1}^N m_i r_i$$

Coordinate eliocentriche canoniche

Le equazioni del moto in coordinate eliocentriche possono essere ricavate attraverso il formalismo lagrangiano ed hamiltoniano

Formulazione lagrangiana

Poniamo

$$r_i = \sum_{j=0}^N a_{ij} x_j, \quad i = 0, \dots, N$$

con

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & & & \\ \vdots & & \mathbb{I}_N & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$$

matrice identità
N x N

cioè

$$r_0 = x_0$$

$$r_i = x_i - x_0, \quad i = 1, \dots, N$$

posizioni eliocentriche
dei pianeti

Estendiamo questa trasformazione ai momenti

$$\{ Q = Aq \rightarrow P = A^{-T}p \}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$$

$$P_i = \sum_{j=0}^N b_{ij} m_j \dot{x}_j$$

con

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Allora

$$P_0 = \sum_{j=0}^N m_j \dot{x}_j = M_0 \dot{y}_0$$

$$P_i = m_i \dot{x}_i \quad i = 1, \dots, N$$

Poniamo l'origine del sistema di riferimento
nel centro di massa

$$y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0$$

$$P_0 = 0$$

$$P_i = m_i \dot{x}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

momenti lineari baricentrici

Posizione del Sole rispetto al centro di massa

$$m_0 x_0 + \sum_{i=1}^N m_i x_i = 0$$

$$x_i = x_0 + r_i$$

$$X_0 = S(r_1, \dots, r_N) = -\frac{1}{M_0} \sum_{i=1}^N m_i r_i$$

Funzione lagrangiana

$$L(x, \dot{x}) = \mathcal{L}(r, \dot{r}) = T(\dot{r}) + U(r)$$

con

$$x = (x_0, \dots, x_N)$$

$$r = (r_1, \dots, r_N)$$

Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} m_0 |\dot{S}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{S} + \dot{r}_i|^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_j} = m_0 \left(\frac{\partial \dot{S}}{\partial \dot{r}_j} \right)^T \dot{S} + \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \dot{S}}{\partial \dot{r}_j} \right)^T (\dot{S} + \dot{r}_i)$$

$$+ m_j (\dot{S} + \dot{r}_j) =$$

$$M_0 \left(-\frac{m_j}{M_0} \right) \dot{S} - \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{m_i m_j}{M_0} \dot{r}_i}_{= m_j \dot{S}} + m_j (\dot{S} + \dot{r}_j)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_j} = m_j (\dot{S} + \dot{r}_j)$$

Energia potenziale

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{G m_0 m_i}{|r_i|} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|}$$

È possibile mostrare che le equazioni ● si ottengono da

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} = 0$$

Formulazione hamiltoniana

Ricordiamo che

$$\sum_{i=0}^N m_i \dot{x}_i = 0 \rightarrow m_0 \dot{s} = - \sum_{i=1}^N P_i$$

$$\begin{aligned} T(P) &= \frac{1}{2m_0} \left| \sum_{i=1}^N P_i \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{|P_i|^2}{m_i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |P_i|^2 \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_i} \right) + \frac{1}{m_0} \sum_{1 \leq i < j \leq N} P_i \cdot P_j \end{aligned}$$

con $P = (P_1, \dots, P_N)$

Trasformata di Legendre

$$\begin{aligned} H(P, r) &= \underbrace{\sum_{i=1}^N P_i \cdot \dot{r}_i}_{\dot{r} = \dot{r}(P)} - \mathcal{L}(r, \dot{r}) \Big|_{\dot{r} = \dot{r}(P)} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i \cdot (\dot{x}_i - \dot{s}) = \sum_{i=1}^N m_i |\dot{x}_i|^2 - (-m_0 \dot{s}) \cdot \dot{s} = 2T \end{aligned}$$

$$H = 2T - T - U = T - U$$

Si ha

$$H(P, r) = H_0(P, r) + H_1(P, r)$$

con

$$H_0(P, r) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |P_i|^2 \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_i} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{G m_0 m_i}{|r_i|}$$

$$H_1(P, r) = \frac{1}{m_0} \sum_{1 \leq i < j \leq N} P_i \cdot P_j - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|}$$

H_0 è la somma di N hamiltoniane del problema di Keplero

H_1 rappresenta la funzione perturbatrice

Integrale del momento angolare

$$C = \sum_{i=0}^N \mathbf{x}_i \times (m_i \dot{\mathbf{x}}_i) = \mathbf{s} \times (m_0 \dot{\mathbf{s}}) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{s} + \mathbf{r}_i) \times (m_i \dot{\mathbf{x}}_i)$$

$$= \mathbf{s} \times \underbrace{\sum_{i=0}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i}_{\parallel \mathbf{M}_0 \dot{\mathbf{y}}_0 = 0} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times (m_i \dot{\mathbf{x}}_i)$$

$$C = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times (m_i \dot{\mathbf{x}}_i) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$