CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

18 Febbraio 2008

Esercizio 1: Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{p} = -q - \gamma f(p) \\ \dot{q} = f(p) \end{cases} \qquad \gamma \in \mathbf{R}$$

con $f(p) = p(p^2 - 1)(p^2 - 4)$.
a) Per $\gamma = 0$ si mostri che è un sistema Hamiltoniano, si trovi la funzione di Hamilton e si tracci il grafico qualitativo delle soluzioni nel piano (p, q).
b) Per $\gamma > 0$ ma piccolo si tracci il grafico qualitativo delle soluzioni e si evidenzino i bacini di attrazione o di repulsione dei pozzi e delle sorgenti, rispettivamente.
c) Lo stesso del punto b) per $\gamma < 0$ ma piccolo.

Esercizio 2:
In un piano verticale con coordinate x, y (l'asse y è verticale ascendente) si consideri il sistema meccanico costituito da un'asta di massa trascurabile di lunghezza 2ℓ con estremi A, C vincolati a scorrere lungo un vincolo parabolico di equazione $y = x^2/\ell$. Al centro B dell'asta si trova un punto materiale di massa m, soggetto alla forza di gravità di intensità g.
a) Usando come parametro lagrangiano l'ascissa $s = x_B$ del punto B, si calcoli l'ordinata y_B in funzione di s. (Suggerimento: si usi il parametro ausiliario θ come indicato in figura per calcolare la posizione di A e C. Si trova poi una relazione tra s e θ imponendo che l'asta resti di lunghezza 2ℓ.)
b) Si scrivano la Lagrangiana e si trovino i punti di equilibrio del sistema.
c) Si studi la stabilità dei punti di equilibrio.