CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. G.F. Gronchi

11 Aprile 2007

Esercizio 1: Si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = y \ - \frac{1}{1+y^2} \\ \dot{y} = -x\ (1 + 2x^2) \end{cases}$$

a) Si trovino i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità lineare;
b) si determini se il sistema dinamico ammette un integrale primo, e in caso affermativo se ne trovi l'espressione;
c) si descriva il comportamento di tutte le orbite.

Esercizio 2:
In un piano verticale si consideri un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi su di una spirale di equazione

$$\begin{cases} x = \theta\ \cos\theta \\ y = \theta\ \sin\theta \end{cases}$$

per $\theta > 0$. Inoltre sul corpo agisce un'accelerazione di gravità di intensità g rivolta verso l'asse delle y negative. Utilizzando la coordinata θ come coordinata lagrangiana
a) si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange;
b) si scrivano la funzione di Hamilton e le equazioni di Hamilton; si descrivano i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano in funzione dei parametri;
c) si discuta la stabilità dei punti di equilibrio, e nel caso stabile si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni (nell'approssimazione lineare);
d) si tracci un grafico qualitativo delle orbite.

Esercizio 3: Dato il sistema dinamico discreto

$$X_{k+1} = A\, X_k \qquad X_k \in \mathbf{R}^2$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) si discuta la stabilità del punto fisso;
b) si trovi la soluzione generale in forma esplicita.