CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

3 Giugno 2005

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico continuo lineare

$$\frac{dX}{dt} = A\,X \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5/4 \\ 0 & 3/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 5/4 \end{bmatrix}$$

a) si discuta la stabilità dell'origine per $t \to +\infty$ e per $t \to -\infty$;
b) si calcoli la soluzione particolare con condizione iniziale

$$X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; ;$$

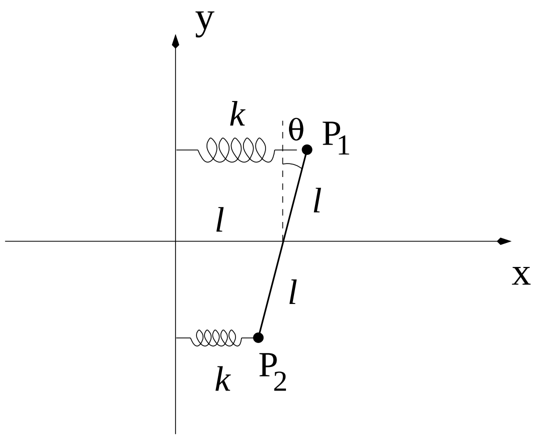
c) si calcoli la soluzione generale in funzione delle condizioni iniziali

$$X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \; .$$

Esercizio 2: Si consideri il sistema meccanico costituito da due punti materiali, P_1, P_2, di massa m_1, m_2 rispettivamente, collegati tra loro da una sbarretta rigida di massa trascurabile e lunghezza 2ℓ. I punti P_1, P_2 sono vincolati a muoversi in un piano verticale, in cui introduciamo un sistema di riferimento Oxy ed il centro della sbarretta è vincolato a restare nel punto $(\ell, 0)$ di tale riferimento. Su P_1 e P_2 agiscono due forze elastiche, di ugual costante k, con centro sull'asse y e sempre parallele all'asse x (vedi figura).

a) Utilizzando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che la sbarretta forma con la direzione verticale (vedi figura), si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;

b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m_1, m_2, k, ℓ, g;



c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione del parametro

$$J = \frac{(m_1 - m_2)g}{2k\ell} ,$$

si tracci il diagramma di biforcazione nel piano (J, θ) e si faccia un disegno qualitativo delle orbite.

Esercizio 3: Data l'equazione alle differenze finite

$$x_{k+1} - \frac{1}{4}\, x_k - \frac{1}{8} x_{k-1} = 1$$

a) esprimere la soluzione in funzione delle condizioni iniziali x_0, x_1;
b) discutere il comportamento delle soluzioni per $k \to \pm\infty$.