CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

10 Febbraio 2005

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico continuo lineare:

$$\frac{dX}{dt} = A\,X \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Si trovi la forma canonica di Jordan reale della matrice A;
b) si determinino le condizioni iniziali per le quali l'orbita $X(t)$ per $t \geq 0$ è limitata;
c) Si trovi la soluzione con condizioni iniziali $X_0 = (2, 0, 0)$.

Esercizio 2: Sia dato un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi su un' iperbole di equazione $z = -1/r$ in un piano verticale (r, z).
Supponiamo che il corpo sia soggetto a un'accelerazione di gravità, rivolta verso la direzione delle z negative, di intensità g. Supponiamo inoltre che il piano (r, z) sia mantenuto in rotazione attorno all'asse z da forze esterne con velocità angolare costante ω.
a) Si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;
b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, g, ω;
c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione dei parametri e si tracci un disegno qualitativo delle orbite.

Esercizio 3: Si consideri il sistema dinamico gradiente con potenziale

$$U(x, y) = \frac{y^2}{2} + x^2\,(x + 1)\ .$$

a) Si scrivano le equazioni differenziali e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico;

b) si determini la stabilità o meno dei punti di equilibrio;
c) si determini il bacino di attrazione di ciascuno dei punti di equlibrio;
d) si determinino le condizioni iniziali per le quali l'orbita va all'infinito per $t \to +\infty$.