G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli

Appunti di Meccanica Razionale

anno accademico 1998 – 99

2

MECCANICA NEWTONIANA

2.1 Introduzione

Per quanto riguarda le proprietà dello spazio e del tempo, terremo qui il punto di vista originario di Newton, secondo cui esiste, come nella geometria classica, uno "spazio assoluto" munito di una struttura euclidea (cioè di un prodotto scalare definito positivo), ed esiste inoltre un "tempo assoluto".[1)]

Seguendo Newton, tralasciamo poi ogni discussione sui principi della meccanica, che coinvolgerebbero in maniera inestricabile, oltre alle nozioni di spazio e tempo, anche quelle di massa e forza; ammettiamo dunque che per un punto materiale P di massa m soggetto a una forza $\mathbf{F}$ assegnata valga l'equazione di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, se $\mathbf{a}$ è l'accelerazione calcolata rispetto a un sistema di riferimento solidale con lo "spazio assoluto", e facendo uso del "tempo assoluto". Vedremo poi, come d'altronde è ben noto, che allora conseguentemente la stessa equazione con la medesima forza vale anche se si calcola l'accelerazione rispetto a ogni altro sistema di riferimento che trasli uniformemente rispetto al sistema "assoluto". Ogni sistema di riferimento di tale classe si dice *inerziale*, perchè rispetto ad esso vale la legge di inerzia (cioè un punto non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme). Resta poi il problema di conoscere se un sistema di riferimento sia effettivamente inerziale. La soluzione che si fornisce è empirica: per le esperienze consuete è approssimativamente inerziale un sistema solidale con la superficie terrestre; per lo studio del sistema planetario è

[1)] Il punto di vista della relatività non verrà preso in considerazione in queste note. Per la relatività, si vedano gli articoli originali, tradotti ad esempio in A.Einstein, *Opere Scelte*, Bollati Boringhieri (Torino, 1988). Molto interessanti sono le memorie di grandi pensatori, da Cartesio a Poincaré, riprodotte ad esempio in A.Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa*, Boringhieri (Torino, 1967); particolarmente notevole la dissertazione inaugurale di Riemann del 1844. Un considerevole precedente del concetto di *tempo proprio* e delle trasformazioni di Lorentz si trova in W.Voigt, Gött.Nachrichten, 41, 1887, citato in H.A.Lorentz, *The theory of electrons* (1909; ristampa Dover, New York, 1952).

approssimativamente inerziale un sistema con origine nel sole, con assi che puntano verso le “stelle fisse”, e così via. Analogamente ci si comporta per il tempo.

2.1.1 *Richiami di geometria*

Per fissare le notazioni ricordiamo che, se nello spazio si sceglie un'origine O, allora a ogni punto P viene a corrispondere un vettore; tale vettore viene spesso denotato con $\vec{OP}$ o con $\mathbf{x}_P$ o con $\mathbf{r}_P$, o più semplicemente con $\mathbf{x}$, o con $\mathbf{r}$; noi useremo frequentemente anche la notazione, altrettanto classica,[2] $(P-O)$. Se si sceglie una diversa origine O', il medesimo punto P sarà individuato da un altro vettore $(P-O')$, e la relazione tra tali vettori sarà evidentemente[3]

$$(P-O') = (P-O) + (O-O') \ , \tag{2.1}$$

o equivalentemente

$$(P-O) = (P-O') - (O-O') \ . \tag{2.2}$$

Dato un vettore $\mathbf{x}$, ad esempio il vettore $(P-O)$, sarà possibile decomporlo secondo i vettori di una base. Ci atterremo qui al procedimento consueto nelle trattazioni elementari, in cui si usano basi “ortonormali”. Ci si riferisce dunque a una metrica preassegnata, che, per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ fornisce il “prodotto scalare” $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$,[4] e in particolare, per ogni vettore $\mathbf{x}$, la norma o lunghezza $\|\mathbf{x}\|$ definita da[5] $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$.[6]

---

[2] Questa notazione risale a Hermann Grassmann (1809, 1877). Ricordiamo che il vettore $(P-O)$ denota la classe di equivalenza dei segmenti orientati che si ottengono dal segmento orientato OP per *trasporto parallelo.*

[3] Queste relazioni si ottengono formalmente dalla scrittura del vettore $(P-O')$ “aggiungendo e sottraendo” il punto O e usando la relazione $(O-O') = -(O'-O)$. Proprio per questo appare conveniente la notazione $(P-O)$.

[4] Con le consuete proprietà: bilineare, simmetrico, definito positivo e non degenere, ovvero

$$\begin{aligned}
(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2)\cdot\mathbf{y} &= a_1\,(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{y}) + a_2\,(\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{y}) \ , \\
\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= \mathbf{y}\cdot\mathbf{x} \ , \\
\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} &\geq 0 \ , \\
\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= 0 \quad \text{per ogni} \quad \mathbf{y} \quad \text{implica} \quad \mathbf{x} = 0 \ .
\end{aligned}$$

Nei testi italiani, tipicamente nel classico testo di Levi–Civita e Amaldi, il prodotto scalare è denotato con $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$, mentre tale ultima notazione è usata nei testi anglosassoni per il prodotto vettore. Molto spesso, soprattutto in analisi funzionale, il prodotto scalare è denotato con $(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

[5] Useremo anche la notazione $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^2$.

[6] Il coseno dell'angolo ϑ tra due vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ viene definito da

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \ .$$

Se invece si accettano per primitive la nozioni di ortogonalità (e quindi di proiezione ortogonale) e di lunghezza di un vettore, il prodotto scalare $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ viene definito come il

Si dice allora che una base di vettori $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ è ortonormale se si tratta di vettori "normalizzati"(ovvero di lunghezza unitaria: *versori*), e ortogonali, cioè con la proprietà

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \ , \quad i, j = 1, 2, 3$$

dove δ_{ij} è il ben noto simbolo di Kronecker, che vale 1 se $i = j$, zero se $i \neq j$. Assegnata la base $\mathbf{e}_i$, per ogni vettore $\mathbf{x}$ è allora definita univocamente una terna di componenti x_i tali che

$$\mathbf{x} = \sum\nolimits_i x_i \mathbf{e}_i \ ,$$

e per l'ortonormalità della base si ha[7)]

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i \ .$$

Inoltre, da $\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \sum y_i \mathbf{e}_i$, segue $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum x_i y_i$; in particolare, per la norma (o lunghezza) $\|\mathbf{x}\|$ di $\mathbf{x}$ si ha $\|\mathbf{x}\|^2 \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_i x_i^2$. A volte denoteremo anche $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ rispettivamente con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, e scriveremo anche $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Il prodotto vettore tra due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ sarà denotato secondo la tradizione italiana con $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$.[8)] Come è ben noto, $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ è definito come il vettore ortogonale al piano individuato da $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, orientato in modo che la terna $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ sia destrorsa,[9)] e di lunghezza pari all'area del parallelogramma individuato da $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Dunque il prodotto vettore è bilineare e antisimmetrico.[10)] Per ogni terna ortonormale destrorsa si ha in

---

prodotto delle lunghezze di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ per il coseno dell'angolo ϑ definito dai due vettori.

7) Infatti, per la linearità del prodotto scalare si ha

$$\mathbf{e}_i \cdot \sum_j x_j \mathbf{e}_j = \sum_j x_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_j x_j \delta_{ij} = x_i \ .$$

Lo stesso procedimento si utilizza anche per le componenti di vettori in spazi funzionali di Hilbert, come vedremo ad esempio per le serie di Fourier nel capitolo sulle equazioni a derivate parziali, a proposito tipicamente del problema della corda vibrante.

8) I testi anglosassoni hanno invece $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, e i testi russi, come tipicamente Arnold, hanno $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

9) Dunque, la definizione di prodotto vettore non è del tutto intrinseca, perchè dipende dalla scelta dell'orientazione. Per questo motivo il prodotto vettore viene talvolta detto definire uno "pseudovettore".

10) Cioè si ha

$$(a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2) \wedge \mathbf{y} = a_1 (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{y}) + a_2 (\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{y}) \ ,$$
$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \ .$$

Segue in particolare $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0$, che è di frequentissima applicazione.

particolare $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$.[11)] Valgono inoltre la *regola del prodotto misto*[12)]

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x} \tag{2.3}$$

(si *cicla* su x, y, z), e la *regola del doppio prodotto vettore*

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x})\, \mathbf{y} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{y})\, \mathbf{x} \ , \tag{2.4}$$

che è di uso frequente, la cui dimostrazione è abbastanza semplice.[13)] Si vede in particolare che il prodotto vettore non è associativo.[14)]

Ricordiamo che, per un assegnato movimento $P(t)$, la velocità $\mathbf{v} \equiv \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ è definita da $\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$. Si osservi che il vettore $P(t+\Delta t) - P(t)$ è definito in maniera intrinseca, senza bisogno di far riferimento ad una origine; se poi è assegnata una origine O, sicché il punto P è individuato dal vettore $\mathbf{x} = (P - O)$, allora si ha

---

11) Se $\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \sum y_i \mathbf{e}_i$, dalla linearità segue quindi

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \ , \quad (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \ , \quad (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(si noti l'ordine ciclico dgli indici $1, 2, 3$); in maniera compatta,

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j y_k \ ,$$

dove $\varepsilon_{ijk} = 0$ se almeno due indici sono uguali, $= \pm 1$ se gli indici sono tutti diversi, con il segno $+$ se sono permutazione pari di 1,2,3, con il segno $-$ altrimenti (simbolo di Ricci o di Levi–Civita).

12) Ciò corrisponde al fatto che il prodotto misto $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$ rappresenta il volume (con segno) del parallelogramma individuato dai tre vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. In particolare si ha allora che il prodotto misto si annulla se almeno due dei fattori sono paralleli. Arnold denota $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$ con $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

13) Per evitare di compiere la verifica esplicita, con un calcolo elementare ma tedioso, si può procedere nel modo seguente: per la definizione di prodotto vettore, è chiaro che il secondo membro deve essere una combinazione lineare di $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}$ (perchè deve essere ortogonale a $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$), e dunque restano da calcolare i coefficienti. Trattandosi di una proprietà intrinseca, possiamo a tal fine utilizzare una base conveniente. Prendiamo allora $\mathbf{e}_1$ parallelo a $\mathbf{x}$, ed $\mathbf{e}_2$ nel piano individuato da $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, sicchè si ha

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 \ , \quad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 \ , \quad \mathbf{z} = z_1 \mathbf{e}_1 + z_2 \mathbf{e}_2 + z_3 \mathbf{e}_3 \ .$$

Da questa segue immediatamente

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} = x_1 y_2 z_1 \mathbf{e}_2 - x_1 y_2 z_2 \mathbf{e}_1 \ ,$$

e aggiungendo e sottraendo il termine $x_1 y_1 z_1 \mathbf{e}_1$ si ottiene la conclusione.

14) Si controlla immediatamente, facendo uso della (2.4), che vale la *identità di Jacobi*

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} + (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) \wedge \mathbf{y} + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) \wedge \mathbf{x} = 0 \ .$$

Uno spazio vettoriale V munito di una operazione binaria da $V \times V$ in V che sia bilineare, antisimmetrica e soddisfacente l'identità di Jacobi si dice costituire una *algebra di Lie*. Incontreremo un altro esempio di algebra di Lie trattando delle parentesi di Poisson nell'ambito del formalismo hamiloniano.

$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$. Naturalmente abbiamo qui implicitamente assunto che il punto O fosse fisso; la relazione più generale, del tutto ovvia, è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P - O) = \mathbf{v} - \mathbf{v}_O \ , \tag{2.5}$$

dove con $\mathbf{v}_O$ abbiamo denotato la velocità del punto O. In modo analogo si procede per l'accelerazione $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$.

Scelto dunque un sistema di riferimento ortonormale fisso $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, un punto P risulta individuato da un vettore $\mathbf{x} = (P - O)$, con coordinate x_i definite da $\sum_i x_i \mathbf{e}_i$; allora, per ogni movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ si ha che la velocità $\mathbf{v}(t)$ e l'accelerazione $\mathbf{a}(t)$ hanno componenti $v_i = \dot{x}_i$, $a_i = \ddot{x}_i$, cioè si ha $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}} = \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{a} \equiv \ddot{\mathbf{x}} = \sum_i \ddot{x}_i \mathbf{e}_i$.

Ricordiamo infine che, per vettori dipendenti dal tempo, le derivate di prodotti scalari e prodotti vettore hanno la proprietà di Leibniz (derivata del prodotto = derivata del primo fattore per il secondo + il primo fattore per la derivata del secondo).

2.2 Problema a un corpo: teoremi generali

Avendo fissato un sistema di riferimento ortonormale $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, sicchè un punto P è individuato da un vettore $P - O \equiv \mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$, ammetteremo dunque che il moto di P sia determinato dall'equazione di Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \ ; \tag{2.6}$$

la funzione $\mathbf{F}$, che rappresenta la forza agente su P, è pensata assegnata. L'equazione (2.6) fornisce un sistema di tre equazioni scalari, ottenute per proiezione sugli assi (cioè moltiplicando scalarmente la (2.6) rispettivamente per $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$): precisamente si ha $m\ddot{x}_i = F_i(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, ovvero, con altra comune notazione,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \ . \end{aligned}$$

Tali equazioni sono, come suol dirsi, accoppiate (cioè non possono essere risolte l'una indipendentemente dalle altre), ed in generale ben poco si può dire sulle soluzioni. Solo in casi eccezionali, tipicamente per problemi dotati di particolari simmetrie, si riesce ad introdurre sistemi di coordinate, in qualche modo adattati alle simmetrie, che danno luogo a equazioni disaccoppiate; si veda ad esempio, più avanti, il caso dei campi di forze centrali a simmetria sferica.

Per il teorema di esistenza e unicità, ogni movimento $\mathbf{x}(t)$ soluzione della (2.6) è individuato dai dati iniziali $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{v}_0$ attraverso le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$. E' quindi significativo considerare lo *spazio degli stati* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ di tutte le possibili posizioni e velocità.

2.2.1 Quantità di moto e momento della quantità di moto.

Per un punto materiale, si definiscono la *quantità di moto* $\mathbf{p}$, ed il *momento della quantità di moto* (o *momento angolare*) $\mathbf{M}_Q$ rispetto ad un polo Q prefissato, rispettivamente come

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \ , \qquad \mathbf{M}_Q = (P - Q) \wedge m\mathbf{v} \ . \tag{2.7}$$

Spesso, quando il polo Q coincide con l'origine O delle coordinate, l'indice O nel momento angolare verrà omesso, cioè scriveremo $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}_O$. Ciò si farà anche per il momento della forza, definito sotto.

- **Esercizio 2.1:** Verificare che tra i momenti della quantità di moto $\mathbf{M}_Q$ e $\mathbf{M}_{Q'}$ calcolati rispetto a due poli distinti Q e Q' sussiste la relazione $\mathbf{M}_{Q'} = \mathbf{M}_Q + (Q - Q') \wedge \mathbf{p}$.

- **Esercizio 2.2:** Verificare che le componenti del momento angolare rispetto all'origine sono $M_x = m(y\dot{z} - z\dot{y})$, $M_y = m(z\dot{x} - x\dot{z})$ e $M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$.

Introducendo il *momento della forza*

$$\mathbf{N}_Q = (P - Q) \wedge \mathbf{F} \ ,$$

ed indicando con $\mathbf{v}_Q$ la velocità del polo Q, si ha la seguente

Proposizione 2.1: *Per ogni movimento $\mathbf{x}(t)$ soddisfacente l'equazione di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, la quantità di moto e il momento della quantità di moto obbediscono alle equazioni*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \ , \qquad \dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - \mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{p} \ ; \tag{2.8}$$

in particolare, se Q è fisso, oppure $\mathbf{v}_Q$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli, l'equazione del momento angolare assume la forma

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q \ .$$

Dimostrazione. La prima equazione altro non è che una riscrittura dell'equazione di Newton. Per ricavare la seconda, si fa uso della relazione

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = (P - Q) \wedge m\mathbf{a} - \mathbf{v}_Q \wedge m\mathbf{v} \ ; \tag{2.9}$$

questa si deduce subito derivando la definizione di momento angolare (2.7), utilizzando la (2.5) con Q in luogo di O, e ricordando che il prodotto vettore di due vettori paralleli è nullo. Si usa poi l'equazione di Newton e la definizione di momento di una forza. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** L'equazione per il momento angolare (seconda delle (2.8)), pur dedotta dall'originale equazione di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, non è ad essa equivalente, cioè non fornisce tre equazioni indipendenti che permettano di dedurre il movimento. Infatti, come si vede dalla (2.9), tale equazione ha la forma $(P - Q) \wedge m\mathbf{a} =$(termine noto); d'altra parte questa non può essere risolta rispetto ad $\mathbf{a}$, cioè scritta nella forma $\mathbf{a} =$ (termine noto), perchè il prodotto vettore con un vettore fissato (qui $(P - Q)$) è un operatore lineare non invertibile, avendo un nucleo non banale, precisamente quello costituito da tutti i vettori paralleli al vettore dato.[15)]

Dalla proposizione 2.1 seguono subito alcune *leggi di conservazione*. Precisamente, se la componente della forza in una direzione è nulla, si conserva (cioè resta costante durante l'evoluzione temporale, ovvero è una costante del moto nel senso discusso nel capitolo precedente) la componente della quantità di moto in quella direzione; analogamente, se si è scelto il polo Q fisso, e la componente del momento della forza lungo una direzione è nulla, si conserva la componente del momento angolare nella stessa direzione. Così, ad esempio, nel caso del punto materiale libero (ossia con $\mathbf{F} = 0$) si conservano sia $\mathbf{p}$ che $\mathbf{M}_Q$ (rispetto ad un qualunque polo fisso); per la forza peso, $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$, si conservano due componenti della quantità di moto, p_x, p_y, ed una del momento angolare, M_z. Un altro caso notevole è quello delle forze centrali, che sarà discusso più avanti.

- **Esercizio 2.3:** Mostrare che per un punto materiale soggetto ad una qualunque forza si possono trovare al più cinque costanti del moto indipendenti, più precisamente funzioni $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ definite nello spazio degli stati, i cui gradienti siano in ogni punto linearmente indipendenti.

  (Suggerimento: per assegnati dati iniziali nello spazio degli stati, ogni costante del moto determina una superficie a cinque dimensioni, su cui deve giacere l'orbita, di dimensione uno).

- **Esercizio 2.4:** Nel caso del punto non soggetto a forze abbiamo incontrato sei costanti del moto: le tre componenti della quantità di moto $\mathbf{p}$ e le tre componenti del momento angolare $\mathbf{M}$. Mostrare che ne esistono effettivamente cinque indipendenti; dedurne che il moto avviene su una retta.

- **Esercizio 2.5:** Verificare che nel caso della forza peso $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ si hanno le cinque costanti del moto indipendenti

$$p_x \ , \quad p_y \ , \quad M_z \ , \quad \frac{p_z^2}{2m} + mgz \ , \quad p_y M_x - p_x M_y + \frac{m^2 g}{2}(x^2 + y^2) \ ;$$

  dedurne che la traiettoria è una parabola giacente in un piano verticale.

2.2.2 Energia cinetica, potenza, lavoro elementare

Per un punto materiale si definisce l'*energia cinetica*[16)] T come

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$$

(si è denotato $\mathbf{v}^2 \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \equiv \|\mathbf{v}\|^2$). Introdotta la *potenza della forza* $\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, si ha la

---

15) Ricordiamo che si dice nucleo di un operatore lineare l'insieme di vettori su cui l'operatore si annulla.

16) Il nome classico è *forza viva (vis viva)*.

Proposizione 2.2 (Teorema dell'energia cinetica): *Per ogni movimento* $\mathbf{x}(t)$ *soddisfacente l'equazione di Newton* $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$*, l'energia cinetica obbedisce all'equazione*

$$\dot{T} = \Pi \ . \tag{2.10}$$

Dimostrazione. Basta moltiplicare scalarmente per $\mathbf{v}$ ambo i membri dell'equazione di Newton, ottenendo $m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, e far uso dell'identità

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\dot{T}}{m} \ .$$

Q.E.D.

Per un assegnato movimento tra due istanti t_0 e t_1, la variazione di energia cinetica è dunque data da

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}t \ ;$$

il secondo membro viene detto *lavoro* della forza $\mathbf{F}$ lungo il movimento considerato. Nel caso di forze puramente posizionali, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, è allora significativo considerare la forma differenziale[17)]

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = F_x(x, y, z)\mathrm{d}x + F_y(x, y, z)\mathrm{d}y + F_z(x, y, z)\mathrm{d}z \ , \tag{2.11}$$

che viene detta comunemente *lavoro elementare* della forza $\mathbf{F}$. Tale forma differenziale viene spesso denotata nei testi classici con[18)] $\delta\mathcal{L}$:

$$\delta\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} \ .$$

2.2.3 *Energia potenziale e teorema di conservazione dell'energia*

Consideriamo dunque il lavoro elementare $\delta\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$, per un problema con forze puramente posizionali. In generale, $\delta\mathcal{L}$ è una forma differenziale in tre variabili: $F_x(x, y, z)\mathrm{d}x + F_y(x, y, z)\mathrm{d}y + F_z(x, y, z)\mathrm{d}z$, con tre funzioni F_x, F_y e F_z arbitrarie. Per molti problemi che si presentano in fisica, avviene però che la forma differenziale $\delta\mathcal{L}$ sia esatta, cioè che esista una funzione $U(\mathbf{x})$ (determinata a meno di una costante additiva) tale che $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}U$. Equivalentemente si può fare riferimento alla funzione $V = -U$, per cui cioè si ha

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = -\mathrm{d}V \ .$$

---

17) Più precisamente, di solito viene chiamata una 1–*forma differenziale*.

18) Nei moderni testi di geometria, a partire da Cartan, si denotano le 1–forme differenziali con lettere come α, ω, …, anziché con espressioni del tipo $\delta\mathcal{L}$, δQ (tipica, quest'ultima, per la quantità di calore). Nei testi classici, l'uso della lettera δ doveva essere pensato in contrasto con l'uso della lettera d, per mettere in rilievo che non si aveva a che fare con una forma differenziale esatta, cioè con il differenziale di una funzione.

La funzione $V(\mathbf{x})$ viene detta *energia potenziale*,[19] Si ha allora[20]

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V \ , \quad (\text{cioè} \quad F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \ , F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \ , F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}) \ ,$$

come si vede confrontando l'espressione $F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z$ con $\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}z$. Si dice in questo caso che il campo di forze è *conservativo*, perché, introdotta l'energia totale $E = T + V$, si ha allora la fondamentale

Proposizione 2.3 (Teorema di conservazione dell'energia): *Se il campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z)$ ammette potenziale, cioè se vale $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = -\mathrm{d}V$ (ovvero $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V$), si ha che l'energia totale $E = T + V$ è una costante del moto.*

Dimostrazione. Si ha evidentemente (teorema di derivazione di una funzione composta) $\dot{V} = \operatorname{grad} V \cdot \dot{\mathbf{x}}$, e dunque da

$$\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}} = -\operatorname{grad} V \cdot \dot{\mathbf{x}} = -\dot{V}$$

segue $\dot{T} + \dot{V} = 0$, ovvero $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + V) = 0$. *Q.E.D.*

Quale semplice esempio, si consideri la forza peso, $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$; in tal caso il lavoro elementare è un differenziale esatto, perchè, essendo nulle le componenti F_x, F_y, si ha

$$F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z = -mg\mathrm{d}z = -\mathrm{d}V \ ,$$

con $V = mgz$.

Un secondo esempio. di fondamentale importanza per la fisica, è quello di un *campo di forza centrale a simmetria sferica*. In generale, un campo di forze si dice *centrale*, con centro O, se in ogni punto P la forza ha la direzione di $(P - O) \equiv \mathbf{x}$, cioè per ogni $\mathbf{x}$ si ha

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{x} = 0 \ . \tag{2.12}$$

Utilizzando le consuete coordinate sferiche (r, ϑ, φ) con origine nel centro O, e introducendo il versore $\mathbf{e}_r \equiv \mathbf{x}/r$ che "punta" da O verso P, si ha allora $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_r f(r, \vartheta, \varphi)$, dove f, che dà l'intensità della forza stessa, è una funzione arbitraria di $\mathbf{x}$, ovvero di r, ϑ, φ; la forza sarà repulsiva o attrattiva secondo che f sia positiva o negativa. Si dice che si ha *simmetria sferica* nel caso particolare cui l'intensità f dipende solo da r, ovvero si ha

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r} f(r) \ . \tag{2.13}$$

---

[19] Nei testi italiani, in in particolare in Levi–Civita e Amaldi, la funzione U viene detta *il* potenziale. Altri autori, ad esempio Arnold, denotano con U quello che qui viene denotato con V. Infine, in molti testi di fisica il nome di potenziale viene riservato all'energia potenziale per unità di massa, nel caso di forze gravitazionali, o per unità di carica elettrica nel caso di forze elettrostatiche. In pratica, quando capita di sfoglliare un testo, per comprendere rapidamente quale convenzione viene seguita basta gettare un colpo d'occhio sull'espressione dell'energia di un sistema (si veda più sotto).

[20] Per $\operatorname{grad} V$ si usa anche la notazione ∇V (∇ viene detto *nabla*).

Vale allora la

Proposizione 2.4: *Ogni campo di forze centrale a simmetria sferica, ovvero della forma (2.13), ammette potenziale; l'energia potenziale V dipende solo dalla coordinata radiale r, ed è una qualunque primitiva di $f(r)$ cambiata di segno, cioè tale che sia*

$$f(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) \ .$$

Dimostrazione. Passiamo dalle coordinate cartesiane x, y, z alle coordinate sferiche r, ϑ, φ. Nel caso di un campo di forze generico, il lavoro elementare è un'effettiva forma differenziale in tre variabili

$$\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z = Q_r \mathrm{d}r + Q_\vartheta \mathrm{d}\vartheta + Q_\varphi \mathrm{d}\varphi \ ,$$

dove $Q_r, Q_\vartheta, Q_\varphi$ sono tre opportune funzioni (dette *forze generalizzate*) che potrebbero essere calcolate seguendo il procedimento generale consistente nell'esprimere $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ in funzione di $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\vartheta$, $\mathrm{d}\varphi$. Nel nostro caso però, grazie alla simmetria sferica, una osservazione banale mostra immediatamente che si ha $Q_\vartheta = 0, \ Q_\varphi = 0$. Infatti dalla (2.13) si ha $\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{f(r)}{r}\mathbf{x}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$, e d'altra parte si ha

$$\mathbf{x}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = r\mathrm{d}r$$

(come si verifica subito differenziando la relazione $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = r^2$), e quindi segue

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = f(r)\mathrm{d}r \ .$$

Dunque la forma differenziale $\delta\mathcal{L}$ è la stessa che si avrebbe se il moto fosse unidimensionale (asse r, o piuttosto semiasse $r \geq 0$) con forza $f(r)$. Ma nel caso unidimensionale ogni forma differenziale è esatta (basta che f sia integrabile); quindi, denotando con V l'opposta di una primitiva di f, tale cioè che $f = -V'$, si ha $f(r)\mathrm{d}r = -\mathrm{d}V(r)$. *Q.E.D.*

In particolare, nel caso kepleriano, dove l'intensità della forza è del tipo $f(r) = -k/r^2$, con k costante positiva, avremo $V(r) = -k/r$, mentre nel caso della forza elastica lineare (legge di Hooke), $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -k\mathbf{x}$, ovvero $f(r) = -kr$, si ha invece $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$.

- **Esercizio 2.6:** Verificare che, per un campo generico di forze, le espressioni delle tre forze generalizzate Q_r, Q_ϑ, Q_φ, in termini delle componenti cartesiane di $\mathbf{F}$, sono:

$$\begin{aligned} Q_r &= F_x \sin\vartheta\cos\varphi + F_y \sin\vartheta\sin\varphi + F_z\cos\vartheta \\ Q_\vartheta &= F_x r\cos\vartheta\cos\varphi + F_y r\cos\vartheta\sin\varphi - F_z r\sin\vartheta \\ Q_\varphi &= -F_x r\sin\vartheta\sin\varphi + F_y r\sin\vartheta\cos\varphi. \end{aligned}$$

- **Osservazione.** Ricordiamo che, anche nel caso più generale di n variabili, si possono dare condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma differenziale $\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n F_i \mathrm{d}x_i$ sia esatta, cioè sia il differenziale di una funzione U. Anzitutto, ci si riferisce al caso in cui la forma sia definita in un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^n$, e sia regolare (i coefficienti F_i siano almeno classe C^1). Una prima condizione necessaria e sufficiente è che la *circuitazione* di F, cioè l'integrale di linea $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x}$, sia nulla per ogni cammino γ chiuso (regolare a tratti) contenuto in A. Una condizione più facilmente verificabile, però in generale soltanto necessaria, è che sia soddistatta la *condizione di chiusura*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0 \ , \quad \forall i,j \ .$$

In particolare, in $\mathbb{R}^3$, tale condizione è equivalente a[21] $\mathrm{rot}\, F = 0$. Infine si ha che la condizione di chiusura è anche sufficiente se si fanno ipotesi più restrittive sull'aperto connesso A; ad esempio si richiede che A sia semplicemente connesso.

- **Osservazione.** Il caso di forze conservative è di estrema importanza in fisica, benchè si presenti come eccezionale da un punto di vista strettamente matematico. Un esempio di campo non conservativo è quello definito da $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{k} \wedge \mathbf{x}$ (si vede facilmente che non è soddisfatta la condizione di chiusura, o equivalentemente che i cammini attorno all'asse z danno circuitazione non nulla). Un secondo esempio, che mette in luce l'importanza della simmetria sferica nel caso delle forze centrali, è il campo di forze, centrale ma non a simmetria sferica, definito da $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\mathbf{x} = -z\mathbf{x}$; infatti, essendo $F_x = -zx$, $F_y = -zy$, $F_z = -z^2$, segue allora $\frac{\partial F_x}{\partial z} = -x \neq \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$.

2.3 Problema a un corpo: il moto centrale

Affrontiamo qui lo studio del moto di un punto in un campo di forze centrale, ossia diretto come la congiungente il generico punto P con un polo fisso O, e anche a simmetria sferica, ossia con intensità $f(r)$ dipendente dalla sola distanza di P da O. Come di consueto, denotiamo $\mathbf{x} \equiv (P - O)$ e $r = \|\mathbf{x}\|$. Un tale campo di forze si scrive nella forma $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(r)\mathbf{x}/r \equiv f(r)\mathbf{e}_r$, e, come si è già visto, ammette potenziale $V(r)$, essendo $f = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$. Questo problema è di fondamentale importanza, in particolare, nello studio delle orbite planetarie e delle orbite classiche degli elettroni attorno ai nuclei.

---

[21] Ricordiamo che, per un campo vettoriale $\mathbf{F}$ in $\mathbb{R}^3$, si dice $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ il campo vettoriale definito da

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \Big(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\Big)\mathbf{i} + \Big(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\Big)\mathbf{j} + \Big(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\Big)\mathbf{k} \ ,$$

o equivalentemente da $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F}$, o da

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{F})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\partial_j F_k \ , \quad \partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \ .$$

2.3.1 Passaggio allo studio del moto piano e deduzione dell'equazione radiale

Si ha anzitutto la

Proposizione 2.5: *In ogni moto centrale si conserva il momento angolare* $\mathbf{M}$*. Inoltre il moto è piano: precisamente, se* $\mathbf{M} \neq 0$*, esso si svolge nel piano* Π *ortogonale a* $\mathbf{M}$ *e passante per il centro* O *delle forze, mentre per* $\mathbf{M} = 0$ *esso degenera in moto rettilineo.*

Dimostrazione. Poichè $\mathbf{F}$ è parallelo a $\mathbf{x}$, il momento della forza $\mathbf{N} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}$ è nullo. Pertanto, in virtù dell'equazione del momento angolare $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}$, si ha che il vettore $\mathbf{M} = m\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}$ si conserva. Se $\mathbf{M} \neq 0$, essendo $\mathbf{x} \equiv (P - O)$ ortogonale a $\mathbf{M}$ (per la definizione stessa di prodotto vettore), e $\mathbf{M}$ fisso, si deduce che $P \in \Pi$. Il caso $\mathbf{M} = 0$ è lasciato come esercizio. *Q.E.D.*

Consideriamo il caso generico $\mathbf{M} \neq 0$; si ha allora necessariamente $r \equiv \|\mathbf{x}\| \neq 0$ (altrimenti sarebbe $\mathbf{M} = 0$). Per studiare il moto conviene introdurre un sistema di riferimento cartesiano con origine in O e asse z diretto come il vettore costante $\mathbf{M}$, sicchè il moto avviene nel piano $z = 0$; inoltre, come è suggerito dal problema, è conveniente far uso, nel piano, di coordinate polari[22)] r e ϑ, definite dalle ben note relazioni[23)]

$$x = r\cos\vartheta \ , \qquad y = r\sin\vartheta \ , \tag{2.14}$$

le quali tengono meglio conto della simmetria del problema. In tal modo il problema della determinazione del movimento consiste nel determinare le due funzioni $r = r(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$. Un problema collegato è quello di determinare la traiettoria (cioè eliminare il tempo); come vedremo, nel moto centrale è sempre possibile prendere come variabile indipendente ϑ, ed esprimere l'equazione della traiettoria nella forma esplicita $r = r(\vartheta)$.

Per ottenere le equazioni di moto in coordinate polari, proiettiamo l'equazione vettoriale di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ lungo le direzioni tangenti localmente alle linee coordinate $\vartheta = \text{cost}$, $r = \text{cost}$ (direzioni radiale e trasversa). E' chiaro che i corrispondenti versori sono dati in ciascun punto da

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{x}/r \ , \qquad \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_r \ , \tag{2.15}$$

o equivalentemente da

$$\mathbf{e}_r = \cos\vartheta\,\mathbf{i} + \sin\vartheta\,\mathbf{j} \ , \qquad \mathbf{e}_\vartheta = -\sin\vartheta\,\mathbf{i} + \cos\vartheta\,\mathbf{j} \ ; \tag{2.16}$$

si osservi che $\mathbf{e}_r$ e $\mathbf{e}_\vartheta$ sono ovunque mutuamente ortogonali (ovvero, le linee coordinate si tagliano ortogonalmente). E' immediato verificare, derivando le (2.16) rispetto al tempo in corrispondenza a un arbitrario moto piano $r(t)$, $\vartheta(t)$, che valgono le relazioni

---

22) In altri termini, si introducono coordinate cilindriche r, ϑ, z, con l'asse z diretto come il vettore costante $\mathbf{M}$.

23) La trasformazione $(x, y) \mapsto (r, \vartheta)$ non è invertibile per $r = 0$. Tuttavia, già sappiamo che la condizione $\mathbf{M} \neq 0$ comporta $r \neq 0$, sicché è significativo restringersi all'aperto costituito dal piano privato dell'origine.

cinematiche

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta \ , \qquad \dot{\mathbf{e}}_\vartheta = -\dot{\vartheta}\mathbf{e}_r \ . \tag{2.17}$$

Le espressioni della velocità $\mathbf{v}$, dell'accelerazione $\mathbf{a}$, dell'energia cinetica T, e dell'unica componente non banale M_z del momento angolare, per un moto piano descritto in coordinate polari, sono fornite dalla seguente

Proposizione 2.6: *Per un arbitrario moto piano $r(t)$, $\vartheta(t)$ si ha*

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta \\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})\mathbf{e}_\vartheta \\ T &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) \\ M_z &= mr^2\dot{\vartheta} \ . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dimostrazione. Per l'espressione di $\mathbf{v}$ basta derivare rispetto al tempo la relazione $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r$, ottenendo $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{x}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$, e usare le (2.17); analogamente si procede per l'espressione di $\mathbf{a}$, derivando quella di $\mathbf{v}$. Per T e M_z, basta sostituire nelle definizioni $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{M} = mr\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{v}$ l'espressione di $\mathbf{v}$ appena trovata. *Q.E.D.*

In particolare dunque le componenti radiale e trasversa di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ hanno le espressioni

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \ , \qquad & v_\vartheta &= r\dot{\vartheta} \ , \\ a_r &= \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 \ , \qquad & a_\vartheta &= r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\vartheta})}{\mathrm{d}t} \ . \end{aligned} \tag{2.19}$$

- **Esercizio 2.7:** Si deducano le (2.18) lavorando in coordinate cartesiane: per $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ si derivi successivamente rispetto al tempo la relazione $\mathbf{x} = r\cos\vartheta\,\mathbf{i} + r\sin\vartheta\,\mathbf{j}$, impiegando poi le (2.16); per T si calcoli $\mathbf{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ a partire dalle (2.14).

Tornando al problema del moto centrale a simmetria sferica, si ha la seguente importante

Proposizione 2.7: *Per un moto centrale a simmetria sferica, la variabile radiale $r(t)$ soddisfa l'equazione di un problema unidimensionale fittizio:*

$$m\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}V_l^*}{\mathrm{d}r} \ , \tag{2.20}$$

con energia potenziale (detta energia potenziale efficace) $V_l^*(r)$ data da

$$V_l^*(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \ , \tag{2.21}$$

dove il parametro l è il valore della costante del moto M_z (fissato ad esempio dai dati iniziali). La variabile angolare $\vartheta(t)$ soddisfa a sua volta l'equazione

$$\dot{\vartheta} = \frac{l}{mr^2} \ . \tag{2.22}$$

Dimostrazione. Dalla espressione di $\mathbf{a}$ data nelle (2.18), e ricordando che il campo di forze ha l'espressione $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{e}_r$, per proiezione su $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$ si ottengono le equazioni del moto nella forma

$$m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) = f(r) \ , \qquad m(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}) = 0 \ ; \tag{2.23}$$

la seconda equazione (moltiplicata per $r \neq 0$) si scrive anche nella forma più significativa

$$\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\vartheta})}{\mathrm{d}t} = 0 \ , \tag{2.24}$$

da cui si legge la già nota conservazione del momento angolare

$$mr^2\dot{\vartheta} = l \ . \tag{2.25}$$

Per ogni valore l di M_z (fissato ad esempio dai dati iniziali) la (2.24) fornisce l'equazione del primo ordine (2.22); per sostituzione nella prima delle (2.23) si ottiene allora per $r(t)$ l'equazione chiusa (cioè coinvolgente solo l'incognita r)

$$m\ddot{r} = f_l^*(r) \ , \qquad f_l^*(r) = f(r) + \frac{l^2}{mr^3} \ ,$$

o equivalentemente, ricordando $f = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$, la (2.20). *Q.E.D.*

Per il moto centrale si studierà dunque anzitutto il corrispondente problema fittizio unidimensionale nel modo indicato nel primo capitolo, cioè riducendolo alle quadrature, grazie al fatto che la corrispondente energia $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_l^*(r)$ è costante; ottenuta così la funzione $r(t)$, si potrà poi calcolare $\vartheta(t)$ per integrazione, usando la legge di conservazione del momento angolare nella forma (2.22). In tal modo, si è ricondotto il problema *alle quadrature*, ovvero al calcolo di integrali.

Questa via di risoluzione per quadrature è legata in modo essenziale alla presenza delle due costanti del moto indipendenti E e l. In effetti, sarebbe stato possibile ottenere la soluzione per quadrature direttamente dall'esistenza di tali costanti del moto, precisamente leggendo le equazioni

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + V(r) = E \ , \qquad mr^2\dot{\vartheta} = l \tag{2.26}$$

come sistema di due equazioni del primo ordine nelle incognite $r(t)$, $\vartheta(t)$ (si ottiene $\dot{\vartheta}$ dalla seconda, la si sostituisce nella prima, e si risolve per $\dot{r}$). Si osservi che, come si verifica immediatamente, l'energia $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_l^*(r)$ del problema fittizio unidimensionale coincide proprio con l'energia $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + V(r)$ dell'originario problema piano.

- **Osservazione.** Dalla (2.22), che esprime la conservazione del momento angolare, si constata che $\dot{\vartheta}$ è di segno costante, sicchè la funzione $\vartheta(t)$ è monotona. Pertanto ϑ può essere assunta come variabile indipendente in luogo del tempo, e dunque per ogni moto centrale la traiettoria può essere descritta nella forma esplicita $r = r(\vartheta)$.

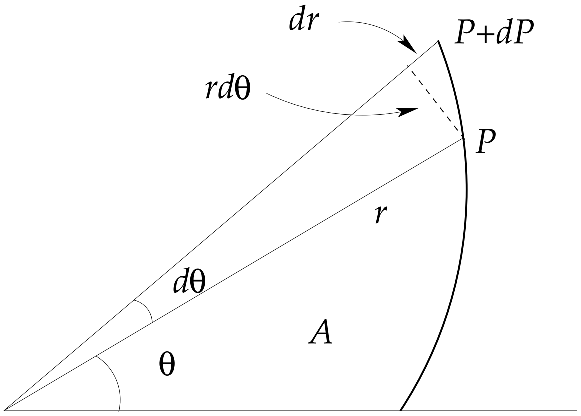


Fig. 2.1

- **Osservazione.** *(Seconda legge di Keplero, o legge delle aree)* La costanza del momento angolare, che vale per il moto in ogni campo centrale (anche non a simmetria sferica), risulta essere equivalente alla ben nota seconda legge di Keplero della costanza della velocità areolare. Infatti, se $\mathcal{A}(t)$ denota l'area della regione $A(t)$ spazzata dal raggio vettore $\mathbf{x}(t) = P(t) - O$ a partire da una posizione prefissata (si veda la figura 2.1), allora si ha
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} \ . \tag{2.27}$$
Per verificare questa affermazione, si osserva che l'area $\mathcal{A}(t)$ è data, in coordinate polari, dalla formula
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t) &= \int_A r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\vartheta' \\ &= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(t)} \mathrm{d}\vartheta' \int_0^{r(\vartheta')} r' \mathrm{d}r' = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(t)} r^2(\vartheta') \mathrm{d}\vartheta' \ ,\end{aligned}$$
e si usa poi la nota regola di derivazione di un integrale.
Nella sostanza, come si vede dalla figura, ciò è equivalente a osservare che l'incremento di area $\mathrm{d}\mathcal{A}$ associato allo spostamento $\mathrm{d}\mathbf{x}$ è dato (per definizione di prodotto vettore) dalla componente lungo l'asse z del vettore $\frac{1}{2}\mathbf{x} \wedge \mathrm{d}\mathbf{x}$, cioè da $\frac{1}{2}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \wedge \mathbf{v} \mathrm{d}t = \frac{1}{2m}\mathbf{M} \cdot \mathbf{k} \mathrm{d}t$. Scriveremo dunque la legge di conservazione della velocità areolare (seconda legge di Keplero) nella forma
$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} = c \ , \qquad c = \frac{l}{2m} \ ;$$
c è detta *costante delle aree.*

2.3.2 Discussione qualitativa dell'orbita

Abbiamo mostrato sopra che in linea di principio, per i moti centrali a simmetria sferica, il calcolo del movimento è ricondotto alle quadrature. È interessante tuttavia svolgere un'analisi qualitativa, nello spirito della trattazione vista nel primo capitolo, che non richiede il calcolo esplicito di integrali.

Si assuma ad esempio una forza attrattiva con potenziale di tipo gravitazionale $V(r) = -kr^{-1}$ (si veda la figura 2.2).[24] Per ogni valore non nullo del parametro l, si ha una energia potenziale efficace $V_l^*(r)$ data dalla (2.21), con $V_l^*(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, $V_l^*(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$; inoltre V_l^* presenta un unico punto di minimo $\bar{r}$, cui corrisponde, per il moto fittizio unidimensionale, un'unica soluzione particolare di equilibrio $r(t) = \bar{r}$. Sostituendo questa soluzione nella (2.22), si ottiene $\dot{\vartheta} = l/(m\bar{r}^2)$, sicchè $\vartheta(t) - \vartheta(0)$ è funzione lineare del tempo; si ha così, per il moto nel piano, un'orbita circolare, percorsa con moto uniforme, che corrisponde a un ben definito valore negativo $\bar{E}_l$ dell'energia E. Come illustrato nel primo capitolo, per valori di energia E nell'intervallo $\bar{E}_l < E < 0$ il moto del problema unidimensionale si svolge necessariamente in un intervallo di estremi $r_{\min}$ (*pericentro*) ed $r_{\max}$ (*apocentro*) dipendenti da l ed E, dove $r_{\min}$ e $r_{\max}$ sono soluzioni dell'equazione $E - V_l^*(r) = 0$. Corrispondentemente, il moto piano si svolge entro una corona circolare, e l'angolo ϑ varia in maniera monotòna *(stati legati)*. Vedremo più sotto che in generale l'orbita assume una forma complessa, descrivendo un moto a rosetta, del tipo rappresentato in figura 2.3; sarebbe poi possibile mostrare che solo in alcuni casi eccezionali ($V = -k/r$ e $V = \frac{1}{2}kr^2$) le orbite risultano essere sempre chiuse. Per valori positivi di energia, si hanno invece orbite illimitate (*stati d'urto* o di *scattering*), perché $r(t) \to +\infty$ per $t \to \pm\infty$, mentre il modulo della velocità tende al valore costante $\sqrt{2E/m}$ per $t \to \pm\infty$ (ovvero per $r \to +\infty$); il problema più interessante è allora la determinazione dell'angolo tra la direzione entrante e la direzione uscente (*angolo di scattering*).

Per determinare la forma dell'orbita, è sufficiente far uso della relazione tra le variabili ϑ, r che si ottiene dalle equazioni di conservazione del momento angolare e dell'energia, $\dot{\vartheta} = l/mr^2$, $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V^*(r)]}$. Precisamente, eliminando il tempo tra le due equazioni (ovvero usando $\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}r} = \frac{\dot{\vartheta}}{\dot{r}}$), si giunge all'equazione

$$\mathrm{d}\vartheta = \frac{l}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - V^*(r)}} \ ; \tag{2.28}$$

questa contiene tutte le informazioni necessarie, e in particolare fornisce, per quadratura, l'espressione dell'orbita nella forma $r = r(\vartheta)$.

Ma, anche senza eseguire il calcolo esplicito dell'orbita, dalla (2.28) si deduce già una interessante proprietà. Consideriamo infatti il caso degli stati legati ($E < 0$). Si è già visto che il moto della variabile r è periodico, con periodo $T_r = T_r(l, E)$ che potrebbe essere calcolato come indicato nel primo capitolo. Ora, durante ogni periodo T_r del moto radiale, la variabile angolare ϑ avanza di una quantità ben definita

---

[24] La trattazione è sostanzialmente identica nel caso più generale in cui l'energia potenziale si annulli meno rapidamente di $1/r^2$ per $r \to +\infty$, e tenda a $-\infty$ meno rapidamente di $-1/r^2$ per $r \to 0$: ad esempio un'energia potenziale del tipo $V(r) = -kr^{\alpha}$, con $-2 < \alpha < 0$.

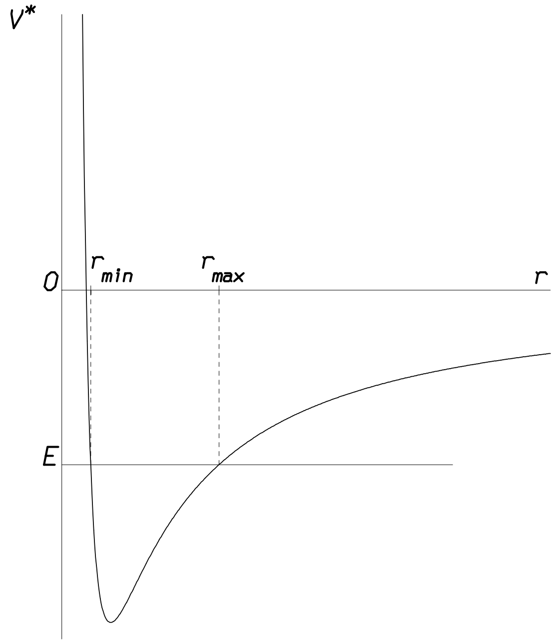


Fig. 2.2

$\Delta\vartheta(l,E)$, che si ottiene integrando la (2.28); precisamente si ha

$$\frac{\Delta\vartheta}{2} = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\rm min}}^{r_{\rm max}} \frac{{\rm d}r}{r^2\sqrt{E - V^*(r)}} \ . \tag{2.29}$$

All'avanzamento $\Delta\vartheta$ della coordinata angolare ϑ durante il periodo T_r del moto radiale si può associare la quantità $\boldsymbol{\omega} = \Delta\vartheta/T_r$, che rappresenta la velocità angolare media su un periodo T_r; essa definisce corrispondentemente un periodo $T_\vartheta = 2\pi/\boldsymbol{\omega}$. E' chiaro allora che l'orbita nel piano sarà chiusa se e solo se i due periodi T_r, T_ϑ sono commensurabili (o equivalentemente se $\Delta\vartheta$ è commensurabile con 2π), mentre in generale si avrà un moto a rosetta.

Analogamente si procede nel caso $E > 0$, corrispondente allo *scattering*. In tal caso, già sappiamo che per $t \to \pm\infty$ la quantità $\dot r$ ammette limite finito non nullo, e che $r \to +\infty$; da $\dot\vartheta = l/(mr^2)$ vediamo allora che $\dot\vartheta \to 0$, cioè $\vartheta(t)$ ammette limiti ϑ_+, ϑ_-. L'espressione per $\Delta\vartheta = \vartheta_+ - \vartheta_-$ (*angolo di scattering*) è ancora fornita dalla (2.29), con $r_{\rm max} = +\infty$; si vede facilmente che tale integrale converge. Si ha infine il caso intermedio $E = 0$, relativo al moto unidimensionale sulla separatrice, in corrispondenza del quale il moto piano è illimitato ma con velocità che si annulla all'infinito. Per una discussione più dettagliata dello *scattering* rimandiamo ad esempio al testo di Meccanica di Landau e Lifšitz.

Come vedremo tra breve, nel caso particolare del potenziale gravitazionale le orbite corrispondenti a valori negativi, nullo o positivi dell'energia risultano essere rispettivamente ellissi, parabole ed iperboli.

- **Esercizio 2.8:** Calcolare $\Delta\vartheta$ per i potenziali elastico ($V(r) = \frac{1}{2}kr^2$) e kepleriano ($V(r) = -k/r$).

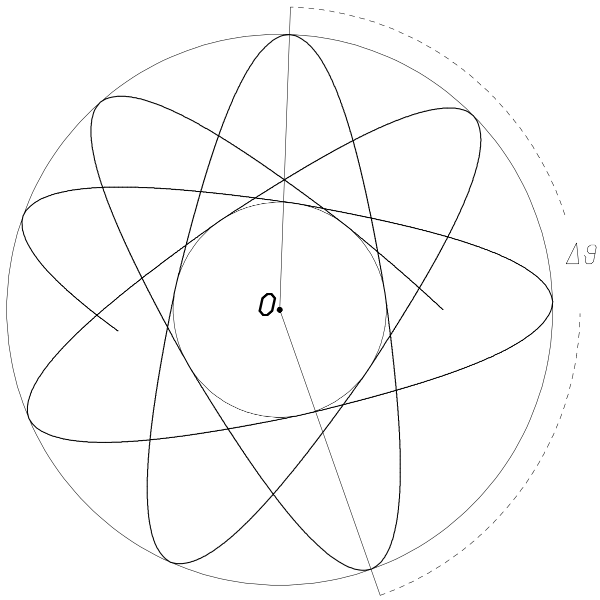


Fig. 2.3
Esempio di moto a rosetta

- **Osservazione.** Abbiamo mostrato che il problema a un corpo, con campo di forze centrale a simmetria sferica, si riconduce alle quadrature, essendo sostanzialmente equivalente a un problema unidimensionale con potenziale efficace $V_l^*(r)$. Per un problema a un corpo di tipo più generale, ciò però non avviene, e il sistema di equazioni non è riducibile alle quadrature; si presentano anzi moti alquanto complicati. Un esempio significativo per l'astronomia, e più in generale per la teoria stessa delle equazioni differenziali, è quello di Hénon e Heiles (*Astronomical Journal*, 1964), relativo al moto di un punto materiale in un campo a simmetria cilindrica. E' questo il primo esempio che ha portato in tempi recenti alla scoperta dei moti cosiddetti caotici in sistemi conservativi.

2.3.3 La formula di Binet

Abbiamo visto che, nel moto centrale a simmetria sferica descritto in coordinate polari piane, la coordinata angolare ϑ è funzione monotona del tempo, in virtù della conservazione del momento angolare (o della legge delle aree $\frac{1}{2}r^2\dot{\vartheta} = c$), sicché si può prendere come variabile indipendente ϑ anzichè il tempo t. Si capisce dunque che, al fine di determinare l'equazione per l'orbita $r = r(\vartheta)$ a partire dalle equazioni di moto, sia particolarmente interessante disporre di una formula che esprima l'accelerazione del punto in termini della funzione $r(\vartheta)$ e di sue derivate; tra l'altro, una tale formula ha anche un ruolo molto rilevante nella discussione del cosiddetto problema inverso di cui si dirà sotto.

Si ha la seguente

Proposizione 2.8 (formula di Binet): *Si consideri un punto che si muova di moto* *piano soddisfacendo la legge delle aree* $\frac{1}{2}r^2\dot\vartheta = c$, *e sia l'orbita descritta nella forma* $r = r(\vartheta)$. *Allora l'espressione per l'accelerazione (puramente radiale)* a_r *è data da*

$$a_r = -\frac{4c^2}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\vartheta^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) . \tag{2.30}$$

Dimostrazione. Si consideri l'orbita descritta nella forma analitica $r = r(\vartheta(t))$, e la si derivi rispetto al tempo, facendo uso della nota formula per la derivata di una funzione composta, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot\vartheta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}$, e della relazione $\dot\vartheta = \frac{2c}{r^2}$. Si ha così

$$\dot r = \dot\vartheta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{2c}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\vartheta} = -2c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\frac{1}{r} ,$$

e derivando ulteriormente si ottiene poi

$$\ddot r = \dot\vartheta\frac{\mathrm{d}\dot r}{\mathrm{d}\vartheta} = -2c\dot\vartheta\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\vartheta^2}\frac{1}{r} = -\frac{4c^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\vartheta^2}\frac{1}{r} .$$

Si sostituisce infine quest'ultima relazione nell'espressione della componente radiale dell'accelerazione (2.19), $a_r = \ddot r - r\dot\vartheta^2$. *Q.E.D.*

- **Esercizio 2.9:** Determinare l'accelerazione per un moto soddisfacente la legge delle aree rispetto a un punto O, quando l'orbita sia un'ellisse con centro in O.

2.3.4 Il caso kepleriano

L'applicazione classica della teoria qui sviluppata, per la quale anzi si può dire sia nata la meccanica stessa, si ha nello studio del moto planetario; d'altra parte, anche il problema del moto classico di un elettrone attorno al nucleo è equivalente a quello del moto planetario, quando si trascuri l'irraggiamento elettromagnetico. Le caratteristiche fenomenologiche del moto dei pianeti sono riassunte nelle ben note *leggi di Keplero*, che si possono così enunciare:

1. i pianeti si muovono descrivendo delle ellissi, aventi tutte un fuoco situato nel sole;
2. il raggio vettore che congiunge ogni pianeta al sole descrive aree eguali in tempi eguali;
3. i quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi.

Il contributo centrale di Newton consistette nel dimostrare come dalle leggi di Keplero si determini univocamente il campo di accelerazioni (e quindi il campo di forze) cui risulta soggetto ogni corpo gravitante attorno al sole. Questo costituisce il cosiddetto *problema inverso*: determinazione del campo di accelerazioni a partire dai moti. Per *problema diretto* si intende invece il problema consistente nel calcolare i movimenti quando sia noto il campo di forze (o di accelerazioni).[25)]

[25)] Tecnicamente, nel discutere questi problemi, faremo uso della formula di Binet, che fu stabilita ben piú tardi dell'epoca di Newton. Alquanto interessante è la trattazione origi-

a) Il problema diretto

Ci si propone dunque di studiare il moto (e determinare la forma delle orbite) per un punto soggetto all'energia potenziale di tipo kepleriano $V(r) = -k/r$, $k > 0$. Questa energia potenziale comprende come caso particolare, che chiameremo propriamente kepleriano o gravitazionale, quello in cui la costante k è proporzionale alla massa m del punto; più precisamente $k = GmM$, ove M è la massa del corpo centrale supposto fisso (il sole, nel caso dei pianeti), e G la costante di gravitazione universale. Un esempio molto importante di energia potenziale di tipo kepleriano ma non gravitazionale è quello della forza di attrazione coulombiana tra cariche di segno opposto (moto di un elettrone soggetto all'attrazione di un nucleo).[26)]

Seguiremo il procedimento più semplice, che fa uso della formula di Binet. Si ha la seguente fondamentale

Proposizione 2.9: *Per il moto centrale con energia potenziale di tipo kepleriano $V(r) = -k/r$, $k > 0$, le orbite sono coniche con un fuoco nell'origine (centro delle forze), di equazione*

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\vartheta - \vartheta_0)} \ , \tag{2.31}$$

con parametro p ed eccentricità e dati da

$$p = \frac{l^2}{mk} \ , \quad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \ , \tag{2.32}$$

(dove l è l'intensità del momento angolare e E l'energia); esse sono pertanto ellissi, parabole o iperboli, rispettivamente per $E < 0$, $E = 0$ o $E > 0$.

Dimostrazione. Già sappiamo che la proiezione dell'equazione di Newton sul versore $\mathbf{e}_\vartheta$ fornisce la conservazione del momento angolare $mr^2\dot{\vartheta} = l$. Così anche, proiettandola sul versore $\mathbf{e}_r$, abbiamo

$$ma_r = -k/r^2 \ .$$

Usiamo ora la formula di Binet (2.30) per a_r. Introducendo la variabile $1/r = u$, e denotando con un apice la derivata rispetto alla variabile ϑ, si ottiene per la funzione incognita $u(\vartheta)$ l'equazione[27)]

$$u'' + u = 1/p \ , \qquad p = 4mc^2/k \ . \tag{2.33}$$

L'integrazione di questa equazione è immediata, perché è analoga all'equazione dell'oscillatore armonico (con variabile indipendente ϑ in luogo di t), non omogenea; si ha dunque

$$u(\vartheta) = 1/p + A\cos(\vartheta - \vartheta_0) \ ,$$

---

nale di Newton; si veda V.I.Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser (Basel, 1990).

26) Il caso di cariche dello stesso segno corrisponde a $k < 0$.

27) Si noti la cancellazione dei fattori r^{-2}, che si presenta solo nel caso della forza di Newton.

dove A e ϑ_0 sono costanti arbitrarie. Sostituendo, in luogo della costante arbitraria A, la costante arbitraria e definita da $A = e/p$, si ritrova la nota equazione in forma polare (2.31) per una conica di eccentricità e e parametro p (per un richiamo, si veda l'appendice A).

Resta da determinare l' espressione di e e p in termini delle costanti l, E. Per p, basta sostituire nella (2.33) la nota relazione tra velocità areolare c e momento della quantità di moto l, ossia $l = 2mc$. Per e, si osserva quanto segue. Da una parte, in base alla (2.31), il valore minimo del raggio (il perielio) è $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$; d'altra parte, si ha che, come punto di inversione, $r_{\min}$ deve essere radice dell'equazione $E - V_l^*(r) = 0$, con $V_l^*(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$. Questa è un'equazione di secondo grado in r, con soluzioni

$$r = \frac{l^2/(mk)}{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \ ;$$

per confronto si trova allora l'espressione di e. Ricordando che le ellissi, le parabole e le iperboli corrispondono rispettivamente a $0 \le e < 1$, $e = 1$, $e > 1$, si ottiene il legame fra l'energia E e il tipo di conica. *Q.E.D.*

Ricordiamo che, per le ellissi, il parametro p e l'eccentricità e si esprimono in termini del semiasse maggiore a e del semiasse minore b mediante le relazioni

$$p = \frac{b^2}{a} \ , \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \ . \tag{2.34}$$

Veniamo ora al calcolo del periodo T con cui sono percorse le ellissi. Si ha la seguente facile

Proposizione 2.10: *Per il moto centrale con energia potenziale di tipo kepleriano, $V(r) = -k/r$, il periodo T del moto sulle ellissi è legato al loro semiasse maggiore a dalla relazione*

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k} \ .$$

Dimostrazione. Il periodo T è dato chiaramente dal rapporto tra l'area πab dell'ellisse e la velocità areolare (costante) $l/2m$. Basta allora ricordare $b^2 = ap$, $p = l^2/(mk)$, e sostituire. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** Nel caso della forza gravitazionale, in cui k è proporzionale a m, precisamente $k = GmM$, si ottiene che il rapporto T^2/a^3 non dipende dalla massa m del corpo, in accordo con la terza legge di Keplero:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \ . \tag{2.35}$$

D'altra parte, anche dalla proposizione 2.10 si vede che, nel caso della forza gravitazionale, per fissati dati iniziali di posizione e velocità, il parametro p e l'eccentricità e caratterizzanti l'orbita perdono la dipendenza da m. In effetti, il fatto che il movimento sia indipendente dalla massa m del corpo è evidente a priori per ogni corpo soggetto a una forza proporzionale alla sua massa, perché allora nella legge di Newton $m\mathbf{a} - \mathbf{F} = 0$ la massa m si fattorizza e può essere eliminata (come nel moto galileiano dei gravi).

- **Osservazione.** Abbiamo visto che nel caso di energia potenziale gravitazionale tutte le orbite limitate hanno forma ellittica, conformemente alla prima legge di Keplero. Sono possibili però anche orbite non limitate, non previste dalle leggi di Keplero, che pure corrispondono a moti effettivi di altri corpi celesti. Si osservi in conclusione quale è stata la strada percorsa logicamente (e storicamente): dalle leggi fenomenologiche di Keplero, che facevano riferimento ad ellissi, si giunge con Newton alla concezione di un campo di accelerazioni (o di forze) attorno al sole: $\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r$, $a_r(r) = -k/r^2$. Interpretando poi questa come un'equazione differenziale per l'orbita, precisamente $\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = -k/r^2$ (e usando la legge delle aree $\frac{1}{2}r^2\dot{\vartheta} = c$ che segue dalla seconda legge) si ritrovano le ellissi, ma si trovano inoltre le iperboli e le parabole.

- **Esercizio 2.10:** Svolgere il calcolo dell'orbita nel caso kepleriano, integrando direttamente la (2.28).

  (Suggerimento: si sostituisca nella (2.28) il potenziale efficace $V_l^*(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$, e si integri; si otterrà

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2 \sqrt{E + \frac{k}{\rho} - \frac{l^2}{2m\rho^2}}} \,.$$

  Si esegua poi la sostituzione $u = \frac{l}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{\rho} - \sqrt{\frac{m}{2}}\, \frac{k}{l}$; ricordando

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{E + \frac{mk^2}{2l^2} - u^2}} = \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{E + \frac{mk^2}{2l^2}}} \right) \,,$$

  si ottiene allora

$$\cos(\vartheta - \vartheta_0) = \frac{\frac{l}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{1}{r} - \sqrt{\frac{m}{2}}\, \frac{k}{l}}{\sqrt{E + \frac{mk^2}{2l^2}}} \,.$$

  Basta infine ricondurre questa equazione alla forma polare di una conica, definendo opportunamente p ed e.)

- **Esercizio 2.11:** Svolgere il calcolo dell'orbita per il caso del potenziale della forza elastica, $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$.

- **Esercizio 2.12:** Studiare il problema del moto centrale con potenziale coulombiano repulsivo: $V(r) = k/r$, $k > 0$.

- **Esercizio 2.13:** Mostrare che nel caso del potenziale kepleriano, $V(r) = -k/r$, si ha un vettore conservato, precisamente il vettore

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{M} - mk\mathbf{x}/r \tag{2.36}$$

(vettore di Laplace o di Runge–Lenz). Dedurne l'equazione delle orbite.

b) Il problema inverso.

Vogliamo ora mostrare come dalle leggi di Keplero si giunge a comprendere che attorno al sole risulta stabilito un campo di accelerazioni (o di forze) centrale e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Per comprendere nella maniera più semplice il cuore dell'argomento, cominciamo a considerare il caso ideale in cui le prima legge contemplasse orbite circolari invece che ellittiche generiche. In tal caso la seconda legge, $r^2\dot{\vartheta} = \text{cost}$, si ridurrebbe ad affermare che il moto è uniforme. Ora, in un moto circolare uniforme è ben noto che l'accelerazione è diretta verso il centro, e di intensità $\omega^2 r$, con $\omega = \dot{\vartheta} = 2\pi/T$, dove T è il periodo. Si avrebbe dunque un'accelerazione radiale di intensità

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{4\pi^2}{r^2}\frac{r^3}{T^2} \ ,$$

che, proprio in virtù della terza legge, è proporzionale a r^{-2}.

Ciò è vero anche sulla base delle leggi effettive di Keplero. Si ha infatti la

Proposizione 2.11: *In virtù delle leggi di Keplero, l'accelerazione di ogni pianeta è sempre diretta verso il sole, ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza da esso. Precisamente si ha*

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r \ , \quad a_r = -\Gamma/r^2 \ , \tag{2.37}$$

dove la costante $\Gamma > 0$ è indipendente dal pianeta ed è data da

$$\Gamma = 4\pi a^3/T^2 \ , \tag{2.38}$$

essendo a il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta, e T il corrispondente periodo.

Dimostrazione. Il fatto che l'accelerazione sia puramente radiale è immediata conseguenza delle proprietà che il moto è piano e la velocità areolare è costante; infatti, come abbiamo già visto, l'accelerazione trasversa è proporzionale alla derivata temporale della velocità areolare, e questa è nulla per la seconda legge di Keplero. L'affermazione sulla intensità dell'accelerazione si dimostra nella maniera più semplice facendo uso della formula di Binet; basta a tal fine ricordare che l'equazione dell'ellisse in coordinate polari ha la forma

$$r(\vartheta) = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta} \ , \tag{2.39}$$

ove il parametro p e l'eccentricità e sono delle costanti, le cui relazioni con i semiassi maggiore a e minore b dell'ellisse sono date dalle (2.34); in particolare per un'ellisse deve essere $e < 1$. Sostituendo questa funzione $r(\vartheta)$ nella formula di Binet si trova allora

$$a_r = -\frac{4c^2}{p}\frac{1}{r^2} \ , \tag{2.40}$$

sicchè si ha appunto che per ogni pianeta il modulo dell'accelerazione (puramente radiale) è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole.

L'espressione (2.37), con Γ dato dalla (2.38), si ottiene ricordando che l'area dell'ellisse è πab, sicchè, detto T il periodo di rivoluzione, la velocità areolare c risulta essere data da $c = \pi ab/T$; sostituendo tale espressione di c e l'espressione di p data dalla (2.34), si ottiene allora

$$\frac{4c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = \Gamma \ . \tag{2.41}$$

D'altra parte, in virtù della terza legge, la quantità Γ è indipendente dal pianeta, cioè è una costante. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** Le leggi fenomenologiche di Keplero, indotte da osservazioni su un numero finito di corpi, inducono dunque a ritenere che ogni corpo subisca una accelerazione diretta verso il sole, e dipendente solo dalla distanza da esso; si ha così, come si dice oggi, un *campo di accelerazioni* centrato sul sole. Pertanto si può pensare, in qualche modo, che tale campo sia "causato" dal sole. Si noti il ruolo della terza legge, che è essenziale nell'interpolare fra i vari pianeti e stabilire una dipendenza analitica, valida per qualunque distanza. Se poi si accetta la legge di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, questa situazione corrisponde al fatto che il sole crea un *campo di forze* inversamente proporzionale al quadrato della distanza da esso, e proporzionale alla massa del pianeta; dunque su qualunque punto materiale posto nello spazio circostante il sole agisce una forza di tipo centrale con intensità

$$f(r) = -\Gamma m/r^2 \ , \tag{2.42}$$

  dove Γ è una costante che dipende dal sole e m è la massa del punto.

- **Osservazione.** Si osservi ulteriormente che nelle leggi di Keplero il moto risulta essere indipendente dalla massa del punto materiale considerato. Il fatto che questa circostanza si verifichi anche per il moto dei gravi in prossimità della superficie terrestre suggerisce che anche il moto dei gravi possa attribuirsi a una causa analoga, e cioè che anche la terra crei intorno a sé un campo di accelerazioni (o di forze), che può a sua volta dar ragione anche del moto della luna. E' allora naturale ammettere che tale campo si prolunghi fino al sole, ossia che la terra eserciti sul sole una forza di intensità

$$\tilde{f}(r) = -\gamma M/r^2 \ ,$$

  dove M è la massa del sole e γ una costante dipendente solo dalla terra. Si noti bene che, se si accetta questo punto di vista, si viene a negare la centralità del sole (si veda a questo proposito il paragrafo sul problema a due corpi). Se infine si ammette il principio di azione e reazione $\tilde{f}(r) = f(r)$, si ottiene

$$\Gamma m = \gamma M \ ;$$

  pertanto l'intensità della forza che si esercita tra la terra e il sole deve valere GmM/r^2, dove G è una costante universale.[28] Lo stesso argomento si applica

---

[28] Infatti, da $\Gamma m = \gamma M$ si ha $\Gamma/M = \gamma/m \equiv G$, e dunque $\Gamma = GM$, $\gamma = Gm$. Per inciso,

evidentemente a qualunque altro pianeta, e deve portare alla stessa legge con la medesima costante G. E' dunque spontaneo, almeno per una persona come Newton, ammettere che tra due masse qualsiasi m_1 e m_2 si esercitino due forze dirette in senso opposto, e della medesima intensità data da

$$f(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \ , \tag{2.43}$$

ove r è la distanza tra le masse.[29)]

- **Esercizio 2.14:** (detto anche problema della mela di Newton): conoscendo il raggio della terra (6.378×10^8 cm), il raggio medio dell'orbita della luna (3.844×10^{10} cm) e il periodo di rivoluzione della luna (27 321 giorni), si calcoli l'accelerazione di gravità in prossimità della superficie terrestre.

2.4 Problema a due corpi

Nel trattare il problema a un corpo in un campo di forze centrale ci siamo valsi dell'equazione di Newton, con l'accelerazione calcolata rispetto a un sistema solidale con il centro delle forze, come se tale sistema di riferimento fosse inerziale. In effetti, appare intuitivo che ciò sia significativo quando il corpo che è considerato originare il campo sia molto più massivo di quello che "subisce la forza". E' tuttavia più spontaneo considerare una descrizione simmetrica, in cui nessuno dei due corpi possa ritenersi "fisso", e ciascuno di essi eserciti sull'altro una forza, in accordo con il principio di azione e reazione. Si scriveranno dunque le equazioni di Newton per ciascuno dei due corpi, calcolando le accelerazioni rispetto a un sistema "assoluto" (o inerziale) che è a priori indipendente dai due corpi. Si verifica tuttavia, come vedremo fra poco, la circostanza significativa che il moto "relativo" di un corpo rispetto all'altro si può descrivere in maniera coerente senza far riferimento esplicito al sistema di riferimento "assoluto" o inerziale.

---

osserviamo che la stessa relazione fornisce anche $m/M = \gamma/\Gamma$, e questa permette di calcolare il rapporto delle masse quando si conoscano γ, Γ; d'altra parte questi ultimi parametri sono dati evidentemente da $4\pi a^3/T^2$, con i corrispondenti valori di a, T, e dunque sono noti se i due corpi hanno dei satelliti. In tal modo si ottiene ad esempio per la terra ed il sole $M/m \simeq 330\,000$.

29) Evidentemente, per ottenere il valore della costante universale G, occorre misurare direttamente le forze di attrazione tra due corpi di cui si conosca il rapporto delle masse (ad esempio determinato con una bilancia). Tale esperienza sembrava irrealizzabile a Newton, per l'effetto preponderante della massa della terra nelle esperienze ordinarie; tuttavia, come è ben noto, essa fu compiuta da Cavendish nel 1797 con una bilancia di torsione. Si trova così $G = 6.66 \times 10^{-8}$unità CGS. In tal modo si ottiene allora il "peso della terra", $m \simeq 6 \times 10^{27}$ grammi. La determinazione della massa della luna si ottiene invece in base alla teoria delle maree.

Veniamo dunque al *problema dei due corpi*, che consiste nello studiare il moto di due punti materiali interagenti. Denotiamo con $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ le accelerazioni di due punti P_1, P_2 rispetto a un sistema assoluto (di origine O), e ammettiamo che si abbia una equazione di Newton per ciascuno dei due punti, cioè valga il sistema delle equazioni

$$\begin{aligned} m_1\mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}_{12} \\ m_2\mathbf{a}_2 &= \mathbf{F}_{21} \ , \end{aligned} \tag{2.44}$$

dove $\mathbf{F}_{12}$ è la forza esercitata su P_1 da P_2, e $\mathbf{F}_{21}$ la forza esercitata su P_2 da P_1. Si tratta di un sistema di due equazioni differenziali vettoriali, ovvero di sei equazioni scalari, in generale accoppiate.

Mostriamo ora come sia possibile ridursi formalmente a un problema a un corpo. Ciò si ottiene facendo uso del principio di azione e reazione, secondo cui si ha $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \equiv \mathbf{F}$, e facendo l'ulteriore ipotesi che le forze siano centrali, cioè che $\mathbf{F}$ dipenda dai vettori posizione $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ solo attraverso la loro differenza, o *vettore di posizione relativa*:

$$\mathbf{r} \equiv (P_1 - P_2) = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \ ,$$

ovvero che sia $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Infatti, sommando le due equazioni, per il principio di azione e reazione si ottiene $m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = 0$, o anche

$$m\mathbf{a}_B = 0 \tag{2.45}$$

dove $\mathbf{a}_B$ è l'accelerazione, rispetto al sistema di riferimento considerato, del baricentro B. Questo è definito da

$$m(B - Q) = m_1(P_1 - Q) + m_2(P_2 - Q) \ ,$$

dove $m = m_1 + m_2$ è la massa totate e Q un punto arbitrario, o equivalentemente da

$$m\mathbf{x}_B = m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2 \ ,$$

dove $\mathbf{x}_1 = (P_1 - O)$, $\mathbf{x}_2 = (P_2 - O)$, $\mathbf{x}_B = (B - O)$. Dunque, rispetto al sistema assoluto, il moto del baricentro è banale, perché il baricentro è fermo o si muove di moto rettilineo uniforme.

Inoltre, per l'ipotesi delle forze centrali, è poi possibile ottenere un'equazione in cui non si fa menzione del sistema di riferimento, ma solo del vettore $\mathbf{r}$ di posizione relativa di uno dei corpi rispetto all'altro. Infatti, sottraendo dalla prima equazione la seconda in (2.44), avendole prima divise rispettivamente per m_1 e m_2, si ha

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \frac{1}{m_1}\mathbf{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \ .$$

Dunque, essendo evidentemente $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \ddot{\mathbf{r}}$, si ha l'equazione $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, dove si è introdotta la cosiddetta *massa ridotta* μ, definita da

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu} \ , \qquad \text{ovvero} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{2.46}$$

(si osservi che $\mu = \frac{1}{2}m_1 = \frac{1}{2}m_2$ per $m_1 = m_2$, mentre $\mu \to 0$ quando una qualunque delle due masse tende a 0; infine, se una delle due masse tende all'infinito, μ prende il valore dell'altra).

Pertanto, per l'ipotesi delle forze centrali $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, si resta con l'equazione

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \ , \tag{2.47}$$

che è formalmente l'equazione per una particella fittizia, di massa pari alla massa ridotta, in cui figura solo il vettore relativo $\mathbf{r}$: in questo senso si è ridotto il problema a due corpi al problema a un corpo. Si noti che un sistema di riferimento con origine in P_2 ed "assi fissi" *non* è inerziale: il significato della (2.47) è dunque che ci si può comportare come se tale sistema di riferimento fosse inerziale, pur di sostituire la massa m_1 con la massa ridotta μ.

In conclusione, abbiamo provato la seguente

Proposizione 2.12: *Nel problema a due corpi, con forze interne $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{21}$ dipendenti soltanto da $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ e soddisfacenti il principio di azione e reazione $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \equiv \mathbf{F}$, il cambiamento di variabili $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \to (\mathbf{x}_B, \mathbf{r})$ muta il sistema delle due equazioni vettoriali accoppiate (2.44) nel sistema disaccoppiato*

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_B &= 0 \\ \mu\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \ , \end{aligned} \tag{2.48}$$

dove μ è la massa ridotta definita dalla (2.46).

Ammettiamo ora di conoscere il moto relativo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, avendo risolto il problema a un corpo (2.47) così come si è fatto nel paragrafo 2.2. È allora immediato ottenere il moto assoluto di P_1 e di P_2 con il cambiamento di variabili inverso $(\mathbf{x}_B, \mathbf{r}) \mapsto (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. In effetti dalla definizione di baricentro data sopra, dove Q è un punto arbitrario, prendendo in particolare $Q = P_1$ oppure $Q = P_2$, segue

$$m(B - P_1) = m_2(P_2 - P_1) \ , \qquad m(B - P_2) = m_1(P_1 - P_2) \ ;$$

pertanto, in termini del vettore di posizione relativa $\mathbf{r} = P_1 - P_2$, segue

$$P_1 - B = \frac{m_2}{m}\mathbf{r} \ , \qquad P_2 - B = -\frac{m_1}{m}\mathbf{r} \ , \tag{2.49}$$

cioè i vettori $P_1 - B$, $P_2 - B$ sono noti quando è noto il movimento relativo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. D'altra parte il moto assoluto del baricentro è banale, essendo il moto per inerzia.

E' interessante osservare che il passaggio alle coordinate $\mathbf{x}_B, \mathbf{r}$, oltre a disaccoppiare le equazioni del moto, consente di scrivere in forma disaccoppiata anche l'energia cinetica totale, definita da

$$T = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 \ .$$

Si ha infatti la

Proposizione 2.13: *L'energia cinetica totale T per il problema a due corpi prende, nelle coordinate $\mathbf{x}_B, \mathbf{r}$, la forma*

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}_B^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 \ , \qquad m = m_1 + m_2 \ . \tag{2.50}$$

Dimostrazione. Dalle (2.49), usando la (2.5) con B in luogo di O, si ottiene

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{x}}_B + \frac{m_2}{m} \dot{\mathbf{r}} \ , \qquad \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{x}}_B - \frac{m_1}{m} \dot{\mathbf{r}} \ .$$

La conclusione è immediata. *Q.E.D.*

E' anche interessante studiare la forma differenziale del lavoro elementare totale, definita da

$$\delta \mathcal{L} = \mathbf{F}_{12} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_1 + \mathbf{F}_{21} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_2 \ . \tag{2.51}$$

Si ha infatti la

Proposizione 2.14: *Nel problema a due corpi, con forze interne soddisfacenti il principio di azione e reazione e di tipo centrale a simmetria sferica, cioè tali che*

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \equiv \mathbf{F} \ , \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}/r \ , \tag{2.52}$$

il lavoro elementare totale, definito dalla (2.51), è un differenziale esatto, cioè si ha

$$\delta \mathcal{L} = -\mathrm{d}V \ ,$$

e V è una primitiva (cambiata di segno) dell'intensità $f(r)$, cioè tale che $f(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r)$.

Dimostrazione. Dalla definizione di lavoro elementare totale, usando il principio di azione e reazione e la linearità del prodotto scalare, si ha $\delta \mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot (\mathrm{d}\mathbf{x}_1 - \mathrm{d}\mathbf{x}_2)$, e quindi, per la linearità del differenziale,

$$\delta \mathcal{L} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \ .$$

Ma questa è la stessa espressione che si ha per il lavoro elementare nel caso del problema a un corpo in un campo centrale;[30] dunque, come per il problema a un corpo per la simmetria centrale si ha $\delta \mathcal{L} = f(r)\mathrm{d}r$, e segue la conclusione. *Q.E.D.*

Le definizioni date di energia cinetica totale T e di lavoro elementare totale $\delta \mathcal{L}$, per cui si ha $\delta \mathcal{L} = \mathrm{d}V$, sono significative in relazione alla seguente

Proposizione 2.15 (Teorema di conservazione dell'energia): *Si consideri il problema a due corpi retto dalle equazioni (2.44), con forze interne soddisfacenti il principio di azione e reazione, centrali a simmetria sferica. Se T è l'energia cinetica totale e V l'energia potenziale delle forze interne, allora l'energia totale*

$$E = T + V$$

---

[30] In generale, $\delta \mathcal{L}$ è a priori una forma differenziale in sei variabili; abbiamo dunque mostrato che, passando dalle variabili $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ alle variabili $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{r}$, i coefficienti relativi alle variabili del baricentro risultano nulli.

è una costante del moto.

Dimostrazione. Si procede come per il problema a un corpo. Moltiplicando scalarmente le (2.44) rispettivamente per $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e sommando si ottiene $\dot{T} = \mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_{21} \cdot \mathbf{v}_2$. D'altra parte si ha

$$\mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_{21} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{F}_{12} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = f(r)\dot{r} = -\dot{V} \ ,$$

da cui segue $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = 0$. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** Nel caso delle forze gravitazionali, si deve osservare che la correzione dovuta all'introduzione della massa ridotta non apporta nessuna modifica alle prime due leggi di Keplero, mentre viene modificata la terza. In effetti, ricordando l'espressione della forza gravitazionale si vede subito che l'equazione per $\mathbf{r}$ assume la forma $\ddot{\mathbf{r}} = -G(m_1 + m_2) \cdot \mathbf{r}/r^3$. Si confronti ora questa equazione con l'analoga equazione $\ddot{\mathbf{r}} = -GM\mathbf{r}/r^3$ che si ha per il moto centrale quando si assume che il punto centrale di massa M sia fermo; si vede allora che alla massa M del corpo centrale si deve sostituire, quando si passa al problema a due corpi, la massa totale $M + m = M(1 + m/M)$. La terza legge verrà allora sostituita dalla relazione
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \, \frac{1}{1 + m/M} \ , \tag{2.53}$$
che presenta una correzione dipendente dal rapporto m/M, piccola se $m \ll M$. Nel caso limite $m/M \to 0$ (in cui si ha anche $P_2 = B$) si ritrova il risultato del problema a un corpo.

- **Osservazione.** In fisica atomica, la sostituzione della massa ridotta alla massa effettiva nel problema a due corpi per l'atomo d'idrogeno si riflette in una variazione della cosiddetta costante di Rydberg per le righe spettrali. Per questo motivo la costante di Rydberg nell'approssimazione del problema a un corpo ($M \to \infty$) viene denotata con R_∞.

- **Esercizio 2.15:** Studiare il moto di due punti soggetti alla forza peso (forze esterne) e alle forze mutue interne dovute all'azione di una molla lineare ideale.

  (Suggerimento: si effettui il cambiamento di variabili ai vettori $\mathbf{r} = P_1 - P_2$ e $\mathbf{x}_B = (B - O)$, posizione relativa e posizione del baricentro; si osservi che le equazioni si disaccoppiano, e si proceda all'integrazione.)

2.5 Problema a n corpi: teoremi generali

Mentre il problema a due corpi è stato ricondotto sostanzialmente al problema a un corpo, che è integrabile almeno nel caso di forze centrali a simmetria sferica, nulla invece può dirsi a priori in generale per un sistema a più di due corpi, al di fuori delle due *equazioni cardinali* e del *teorema dell'energia*, come ora illustreremo.[31] Veniamo dunque ai teoremi generali.

Per un sistema di n punti materiali $P_1, \ldots, P_n$, di masse $m_1, \ldots, m_n$, individuati in un sistema di riferimento da vettori posizione $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, si ammette che valgano le n equazioni di Newton

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, t) \\ &\cdots \\ &\cdots \\ m_n \mathbf{a}_n &= \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, t)\ . \end{aligned} \tag{2.54}$$

Queste costituiscono un sistema di n equazioni vettoriali in generale accoppiate, che pertanto non possono essere risolte separatamente. È però possibile introdurre delle quantità globali, analoghe a quelle già introdotte nel caso del moto di un punto, e studiarne l'evoluzione temporale.

2.5.1 Quantità meccaniche

Per un sistema di n punti $P_1, \ldots, P_n$ introduciamo delle quantità globali, analoghe a quelle introdotte per un punto. Esse vengono definite additivamente, ossia per somma sulle corrispondenti quantità relative ai singoli punti,[32] come segue:

$$\begin{aligned} &\text{massa} & m &= \textstyle\sum_i m_i \\ &\text{energia cinetica} & T &= \textstyle\sum_i T_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 \\ &\text{quantità di moto} & \mathbf{p} &= \textstyle\sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \\ &\text{momento della quantità di moto} & \mathbf{M}_Q &= \textstyle\sum_i \mathbf{M}_{Qi} = \sum_i (P_i - Q) \wedge m_i \mathbf{v}_i \\ &\text{risultante delle forze} & \mathbf{R} &= \textstyle\sum_i \mathbf{F}_i \\ &\text{momento risultante delle forze} & \mathbf{N}_Q &= \textstyle\sum_i \mathbf{N}_{Qi} = \sum_i (P_i - Q) \wedge \mathbf{F}_i \\ &\text{lavoro elementare delle forze} & \delta\mathcal{L} &= \textstyle\sum_i \delta\mathcal{L}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathrm{d}P_i \\ &\text{potenza delle forze} & \Pi &= \textstyle\sum_i \Pi_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i \end{aligned} \tag{2.55}$$

---

[31] In effetti, come fu messo in luce da Poincaré alla fine del secolo scorso, già il problema dei tre corpi, persino nella sua più semplice versione di *problema ristretto, piano e circolare*, può essere considerato come il prototipo dei sistemi dinamici che presentano moti non solo non riducibili a quadrature, ma anzi significativamente complicati, e in un certo senso impredicibili quanto un problema di lancio di dadi (ciò è dovuto alla presenza dei cosiddetti *punti omoclini* di Poincaré).

[32] Quantità di tale tipo vengono dette *estensive*.

Più sotto si introdurrà un'altra quantità globale, l'energia totale; vedremo tuttavia che, nel caso tipico di forze interne a due corpi, essa non apparirà decomposta naturalmente come somma di quantità relative ai singoli punti.

La nozione di quantità di moto totale $\mathbf{p}$ di un sistema di punti materiali è strettamente connessa alla nozione di baricentro. Ricordiamo che questo è definito come il punto B tale che

$$B - O = \frac{1}{m}\sum_i m_i(P_i - O) \tag{2.56}$$

(essendo O un punto arbitrario e $m = \sum m_i$ la massa totale); equivalentemente, in termini di $\mathbf{x}_B = (B - O)$, $\mathbf{x}_i = (P_i - O)$, esso è definito da

$$m\mathbf{x}_B = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \ . \tag{2.57}$$

La relazione tra baricentro e quantità di moto totale $\mathbf{p}$ è data dalla

Proposizione 2.16: *La quantità di moto totale $\mathbf{p}$ di un sistema di punti è pari a quella di un solo punto di massa eguale alla massa totale m del sistema, e coincidente ad ogni istante col baricentro del sistema stesso:*

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_B \ ,$$

dove $\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{x}}_B$ è la velocità del baricentro.

Dimostrazione. Basta derivare rispetto al tempo la (2.57), che definisce la posizione del baricentro, ottenendo $m\mathbf{v}_B = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \equiv \mathbf{p}$. *Q.E.D.*

Per quanto riguarda il momento della quantità di moto (o momento angolare) rispetto a un polo arbitrario Q, si ha un risultato più complesso: oltre al termine $(B - Q) \wedge m\mathbf{v}_B \equiv (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \wedge m\mathbf{v}_B$, che si avrebbe pensando la massa concentrata nel baricentro *(momento angolare orbitale)*, si ha un ulteriore termine, dovuto al moto relativo al baricentro; risulta che questo ulteriore termine non dipende dal polo Q, e pertanto esso viene detto *momento angolare intrinseco, o di spin.* Vale infatti la

Proposizione 2.17: *Il momento della quantità di moto (o momento angolare) $\mathbf{M}_Q$ di un sistema di punti rispetto a un polo Q è dato da*

$$\mathbf{M}_Q = \mathbf{S} + (B - Q) \wedge m\mathbf{v}_B \ , \tag{2.58}$$

dove $\mathbf{S}$, indipendente dal polo Q. è definita da

$$\mathbf{S} = \sum_i (P_i - B) \wedge m_i \mathbf{v}_i = \sum_i (P_i - B) \wedge m_i \mathbf{v}'_i \ , \tag{2.59}$$

con

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_B \ . \tag{2.60}$$

Dimostrazione. Partendo dalla definizione $\mathbf{M}_Q = \sum_i (P_i - Q) \wedge m_i \mathbf{v}_i$, si faccia uso dell'identità $(P_i - Q) = (P_i - B) + (B - Q)$, sicchè si ha

$$\mathbf{M}_Q = \sum_i (P_i - B) \wedge m_i \mathbf{v}_i + (B - Q) \wedge \sum_i m_i \mathbf{v}_i \ ;$$

l'asserto segue allora dalla proposizione 2.16, con $\mathbf{S} = \sum_i (P_i - B) \wedge m_i \mathbf{v}_i$. Per mostrare che tale espressione per $\mathbf{S}$ è equivalente alla seconda, si usa $\sum mi\,(P_i - B) = 0$. *Q.E.D.*

Per l'energia cinetica vale una analoga formula di scomposizione, nota come *teorema di König*. Precisamente, introdotta la cosiddetta *energia cinetica relativa al baricentro* T' definita da[33)]

$$T' = \frac{1}{2} \sum_i m_i \|\mathbf{v}_i'\|^2 \ ,$$

con $\mathbf{v}_i'$ dato dalla (2.60), si ha la

Proposizione 2.18: *L'energia cinetica di un sistema di punti può scriversi nella forma*

$$T = T' + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_B^2 \ . \tag{2.61}$$

Dimostrazione. Nella definizione $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2$, si sostituisce $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_B$, sicchè si ha

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \|\mathbf{v}_i'\|^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_B^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_B \ .$$

D'altra parte si ha $\sum_i m_i \mathbf{v}_i' = 0$, come segue dalla definizione di baricentro. *Q.E.D.*

Si ha poi la

Proposizione 2.19: *La quantità di moto, il momento angolare e l'energia cinetica evolvono secondo equazioni analoghe a quelle ricavate per un punto materiale nelle proposizioni 2.1 e 2.2, precisamente*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R} \ , \quad \dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - \mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{p} \ , \tag{2.62}$$

$$\dot{T} = \Pi \ . \tag{2.63}$$

Dimostrazione. Per ciascun punto si fa uso delle proposizioni 2.1 e 2.2, e del fatto che tutte le quantità sono definite in modo additivo. Così, ad esempio, per la proposizione 2.1 si ha $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i$ per ciascun punto P_i, e sommando membro a membro si ottiene la prima delle (2.62); analogamente per le altre. *Q.E.D.*

Le equazioni (2.62) e (2.63) si presentano come la generalizzazione diretta delle proposizioni 2.1 e 2.2 al caso di più punti, e sono le sole proposizioni che risultano vere in generale. In effetti, però, esse non sono ancora molto interessanti, perchè presuppongono la conoscenza di tutte le forze che agiscono su ciascun punto; mostreremo ora che in condizioni molto generali è sufficiente fare riferimento alle sole forze esterne.

---

33) Si tratta dell'energia cinetica rispetto ad un sistema che trasla solidalmente al baricentro. Si veda più avanti.

2.5.2 *Forze interne e forze esterne*

È utile, a questo punto, introdurre una caratterizzazione più precisa delle forze. Precisamente, supponiamo in generale di poter distinguere le forze che agiscono su un sistema di punti materiali in *forze interne* e *forze esterne*, scrivendo la forza che agisce su ciascun punto P_i come

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(\mathrm{int})} + \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} \ , \quad i = 1, \ldots, n \ , \tag{2.64}$$

ed attribuendo $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{int})}$ all'azione di tutti gli altri punti del sistema e $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})}$ all'azione di un non meglio specificato ambiente esterno. Potremo così affermare che $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})}$ dipende solo dallo stato del punto P_i, e non da quello degli altri punti, ossia che si ha $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} = \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, t)$. Supponiamo poi che le forze interne dipendano solo dalla posizione dei punti, e non dalle loro velocità o dal tempo, sicchè $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{int})} = \mathbf{F}_i^{(\mathrm{int})}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, e che siano inoltre forze a due corpi, ossia si possano a loro volta scomporre nella forma

$$\mathbf{F}_i^{(\mathrm{int})}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} \mathbf{F}_{ij}^{(\mathrm{int})}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \ . \tag{2.65}$$

Si intende con questo che si suppone di poter identificare la forza $\mathbf{F}_{ij}^{(\mathrm{int})}$ che il punto P_j esercita sul punto P_i, che questa dipenda solo dalla posizione dei punti P_i e P_j, e che la forza totale si ottenga semplicemente per *sovrapposizione*, ossia sommando vettorialmente le singole forze.

Per ogni coppia i, j, introduciamo il vettore di posizione relativa

$$\mathbf{r}_{ij} = (P_i - P_j) = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \ , \tag{2.66}$$

e come di consueto la corrispondente distanza

$$r_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\| \ . \tag{2.67}$$

Sulle forze interne si fanno le seguenti ipotesi classiche:

i. che obbediscano al principio di azione e reazione, ossia che si abbia

$$\mathbf{F}_{ij}^{(\mathrm{int})} + \mathbf{F}_{ji}^{(\mathrm{int})} = 0 \ ; \tag{2.68}$$

ii. che siano di tipo centrale, ossia dirette come la congiungente i punti P_i, P_j:

$$\mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(\mathrm{int})} = 0 \ ; \tag{2.69}$$

iii. che dipendano dalla sola distanza r_{ij} tra i punti P_i e P_j.

Queste forze si scrivono allora nella forma

$$\mathbf{F}_{ij}^{(\mathrm{int})} = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} f_{ij}(r_{ij}) \ , \qquad f_{ij} = f_{ji} \ . \tag{2.70}$$

- **Osservazione.** Si tenga presente che la caratterizzazione ora data per le forze, con forze interne a due corpi, posizionali, di tipo centrale a simmetria sferica, soddisfacenti il principio di azione e reazione (forze che Poincaré chiama "di tipo classico"), non discende dai principi generali della meccanica, ma costituisce un *modello* matematico di descrizione della materia. La descrizione della materia come un sistema di n punti materiali interagenti con forze del tipo suddetto costituisce il cosiddetto *modello meccanicistico classico*, diffuso nel diciottesimo secolo particolarmente da Ruggero Boscovich.

In questo modello non si hanno dunque, in particolare, forze dipendenti dalla velocità. Tali forze sono allora concepite come descriventi in maniera approssimata l'effetto delle forze posizionali dovute a tutti i punti costituenti il "mezzo" in cui si viene a trovare il punto considerato. Resta poi il problema di dimostrare che tale descrizione è matematicamente coerente con lo schema di partenza, cioè può essere ottenuta come un teorema in qualche limite opportuno. Si ha qui in effetti un problema molto simile a quello di "dedurre" le leggi della termodinamica dal modello meccanicistico classico. E' questo il problema della "meccanica statistica", alla cui formulazione ha particolarmente contribuito Ludwig Boltzmann.

2.5.3 Equazioni cardinali

Una prima fondamentale conseguenza delle ipotesi fatte sopra è che le forze interne non hanno alcuna influenza sull'evoluzione temporale della quantità di moto e del momento angolare. Precisamente, introdotti il risultante delle forze esterne $\mathbf{R}^{(\mathrm{ext})} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})}$ ed il momento risultante delle forze esterne $\mathbf{N}_Q^{(\mathrm{ext})} = \sum_i (P_i - Q) \wedge \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})}$, si ha la

Proposizione 2.20: *Per un sistema di n punti materiali, con forze interne a due corpi di tipo classico, la quantità di moto totale $\mathbf{p}$ ed il momento angolare totale $\mathbf{M}_Q$ evolvono nel tempo obbedendo alle equazioni*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}^{(\mathrm{ext})} \ , \tag{2.71}$$

ovvero $m\mathbf{a}_B = \mathbf{R}^{(\mathrm{ext})}$, e

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q^{(\mathrm{ext})} - \mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{p} \ . \tag{2.72}$$

In particolare, se il polo Q è fisso, oppure $\mathbf{v}_Q$ è parallelo a $\mathbf{p}$, l'equazione del momento angolare (2.72) prende la forma

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q^{(\mathrm{ext})} \ . \tag{2.73}$$

Dimostrazione. Per ottenere la (2.71) si usa la prima delle (2.62). Grazie alla (2.64), si decompone $\mathbf{R}$ nella somma

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(\mathrm{ext})} + \mathbf{R}^{(\mathrm{int})} \ ,$$

dove $\mathbf{R}^{(\mathrm{int})} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(\mathrm{int})}$, e si osserva che $\mathbf{R}^{(\mathrm{int})} = 0$, in virtù della (2.65) e del principio di azione e reazione (2.68). Infatti, basta osservare che, grazie alla (2.65), si ha

$$\mathbf{R}^{(\mathrm{int})} = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}^{(\mathrm{int})} = \sum_{i<j} (\mathbf{F}_{ij}^{(\mathrm{int})} + \mathbf{F}_{ji}^{(\mathrm{int})}) \ ,$$

e che ogni termine di quest'ultima somma si annulla in virtù del principio di azione e reazione. La forma equivalente si ottiene osservando che da $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_B$ segue $\dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{a}_B$. La (2.72) si ottiene dalla seconda delle (2.62), scomponendo, in modo analogo, $\mathbf{N}_Q = \mathbf{N}_Q^{(\mathrm{ext})} + \mathbf{N}_Q^{(\mathrm{int})}$, con $\mathbf{N}_Q^{(\mathrm{int})} = \sum_i (P_i - Q) \wedge \mathbf{F}_i^{(\mathrm{int})}$. Facendo ancora uso della (2.65) e del principio di azione e reazione si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_Q^{(\mathrm{int})} &= \sum_{1 \le i \le n} (P_i - Q) \wedge \sum_{\substack{j=1,n \\ j \neq i}} \mathbf{F}_{ij}^{(\mathrm{int})} \\
&= \sum_{1 \le i < j \le n} \Big[(P_i - Q) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(\mathrm{int})} + (P_j - Q) \wedge \mathbf{F}_{ji}^{(\mathrm{int})} \Big] \\
&= \sum_{1 \le i < j \le n} (P_i - P_j) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(\mathrm{int})} \ ,
\end{aligned}$$

e quest'ultima somma si annulla in virtù dell'ipotesi (2.69) che le forze siano centrali. *Q.E.D.*

2.5.4 Energia potenziale, teorema dell'energia cinetica e conservazione dell'energia

Consideriamo ora il lavoro elementare totale $\delta\mathcal{L} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_i$. Introducendo la decomposizione (2.64) per le forze si avrà

$$\delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}^{(\mathrm{ext})} + \delta\mathcal{L}^{(\mathrm{int})} \ ,$$

con

$$\delta\mathcal{L}^{(\mathrm{ext})} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_i \ , \qquad \delta\mathcal{L}^{(\mathrm{int})} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(\mathrm{int})} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_i \ .$$

Analogamente si ha, per la potenza, $\Pi = \Pi^{(\mathrm{ext})} + \Pi^{(\mathrm{int})}$.

Cominciamo a considerare le forze interne. Si ha anzitutto la fondamentale

Proposizione 2.21: *Per forze interne di tipo classico, il lavoro elementare totale delle forze interne è un differenziale esatto, e si ha*

$$\delta\mathcal{L}^{(\mathrm{int})} = -\mathrm{d}V^{(\mathrm{int})} \ , \qquad V^{(\mathrm{int})}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \neq j}} V_{ij}(r_{ij}) \ , \tag{2.74}$$

dove V_{ij} è una primitiva, cambiata di segno, di f_{ij}, ossia tale che $f_{ij} = -\frac{\mathrm{d}V_{ij}}{\mathrm{d}r_{ij}}$.

Dimostrazione. Per le ipotesi (2.70) caratterizzanti le forze interne, si ha che il contributo $\delta\mathcal{L}_{ij}^{(\mathrm{int})}$ al lavoro elementare totale dovuto a ciascuna coppia di punti P_i, P_j è lo stesso che si ha nel problema a due corpi:

$$\delta\mathcal{L}_{ij}^{(\mathrm{int})} = \mathbf{F}_{ij}^{(\mathrm{int})} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_i + \mathbf{F}_{ji}^{(\mathrm{int})} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_j \ .$$

Si ha pertanto

$$\delta\mathcal{L}^{(\mathrm{int})}_{ij} = \mathbf{F}^{(\mathrm{int})}_{ij} \cdot \mathrm{d}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \frac{1}{r_{ij}} f_{ij}(r_{ij}) \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{ij} \ .$$

Procedendo come per il problema a un corpo si trova $\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{ij} = r_{ij}\mathrm{d}r_{ij}$, e quindi

$$\delta\mathcal{L}^{(\mathrm{int})}_{ij} = f_{ij}(r_{ij})\mathrm{d}r_{ij} \ .$$

Si ha dunque che esiste l'energia potenziale $V_{ij}(r_{ij})$ per ogni coppia di punti (una qualunque primitiva di f_{ij} cambiata di segno). Il lavoro elementare totale delle forze interne può pertanto scriversi nella forma

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}^{(\mathrm{int})} &= \sum_{i=1,n} \mathrm{d}\mathbf{x}_i \cdot \sum_{\substack{j=1,n \\ j\neq i}} \mathbf{F}^{(\mathrm{int})}_{ij} \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} (\mathbf{F}^{(\mathrm{int})}_{ij} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_i + \mathbf{F}^{(\mathrm{int})}_{ji} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_j) = \sum_{1\le i<j\le n} f_{ij}(r_{ij})\mathrm{d}r_{ij} \ ,\end{aligned}$$

ossia come somma sui contributi di ciascuna coppia, e si ha la conclusione.[34)] *Q.E.D.*

In termini della potenza delle forze interne, si ha corrispondentemente $\Pi^{(\mathrm{int})} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V^{(\mathrm{int})}$, e il teorema dell'energia cinetica (2.63) conduce allora alla seguente

Proposizione 2.22: *Per forze interne di tipo classico, l'energia interna $T + V^{(\mathrm{int})}$ evolve nel tempo secondo l'equazione*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + V^{(\mathrm{int})}) = \Pi^{(\mathrm{ext})} \ . \tag{2.75}$$

- **Osservazione.** Per quanto riguarda le forze interne, si noti bene la differenza tra quanto avviene per l'energia potenziale interna da un parte, e per il risultante $\mathbf{R}$ e il momento risultante $\mathbf{N}_Q$ dall'altra; infatti le forze interne di tipo classico non contribuiscono a $\mathbf{R}$ e a $\mathbf{N}_Q$, mentre contribuiscono all'energia potenziale interna (additivamente sulle coppie).

  Vi è solo un caso speciale, alquanto interessante, in cui le forze interne *non* contribuiscono all'energia potenziale interna, cioè può porsi $V^{(\mathrm{int})} = 0$. È questo il caso dei *corpi rigidi*, o più precisamente delle forze interne che mantengono rigido un corpo. Ricordiamo[35)] che un corpo si dice rigido se le distanze mutue dei suoi punti sono costanti, $r_{ij} = \mathrm{cost}$. Ora, come abbiamo appena visto, in generale ogni coppia di punti contribuisce al lavoro interno con un termine ${\mathbf{F}^{(\mathrm{int})}}_{ij} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_i + {\mathbf{F}^{(\mathrm{int})}}_{ji} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_j = f_{ij}\mathrm{d}r_{ij}$; dunque per i corpi rigidi il lavoro delle forze interne è nullo, perché $r_{ij} = \mathrm{cost}$ comporta $\mathrm{d}r_{ij} = 0$.

---

34) Il fattore 1/2 nella formula (2.74) è dovuto semplicemente al modo diverso in cui vi si denota la somma sulle coppie. Infatti, nell'insieme $\{1 \le i,j \le n; i \neq j\}$ ciascuna coppia compare due volte

35) Una trattazione più dettagliata dei corpi rigidi sarà data più avanti.

Per quanto riguarda le forze esterne, essendo $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} = \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, t)$, il problema è immediatamente ricondotto a quello di un punto materiale. Si potrà quindi affermare che esiste l'energia potenziale delle forze esterne se la forza $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})}$ che agisce su ciascun punto P_i è puramente posizionale, e se il corrispondente lavoro elementare $\delta\mathcal{L}_i^{(\mathrm{ext})} = \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_i$ può scriversi come il differenziale $-\mathrm{d}V_i^{(\mathrm{ext})}$ di una funzione $V_i^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{x}_i)$. In tal caso per il lavoro elementare totale esterno $\delta\mathcal{L}^{(\mathrm{ext})}$ si avrà $\delta\mathcal{L}^{(\mathrm{ext})} = -\mathrm{d}V^{(\mathrm{ext})}$, con $V^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \sum_i V_i^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{x}_i)$. Anche qui si potrà esprimere lo stesso risultato mediante la potenza delle forze esterne, scrivendo $\Pi^{(\mathrm{ext})} = -\frac{\mathrm{d}V^{(\mathrm{ext})}}{\mathrm{d}t}$.

E' dunque significativo introdurre l'*energia interna totale* $V = V^{(\mathrm{int})} + V^{(\mathrm{ext})}$, perchè allora si ha la

Proposizione 2.23: *Si consideri un sistema di n punti materiali soggetti a forze interne di tipo classico e a forze esterne derivanti da potenziale. Allora la forza totale $\mathbf{F}_i$ agente sul punto materiale i–simo deriva da potenziale, e si ha*

$$\mathbf{F}_i = -\mathrm{grad}_i V \ , \quad (\textit{ossia} \quad F_{ix} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \cdots) \ , \tag{2.76}$$

dove $V = V^{(\mathrm{int})} + V^{(\mathrm{ext})}$.

Infine, introducendo l'energia totale $E = T + V^{(\mathrm{int})} + V^{(\mathrm{ext})}$, si ha la

Proposizione 2.24 (Teorema di conservazione dell'energia): *Si consideri un sistema di n punti con forze interne sono del tipo classico (2.70) e con forze esterne derivanti da potenziale. Allora l'energia totale $E = T + V^{(\mathrm{int})} + V^{(\mathrm{ext})}$ è una costante del moto.*

Passiamo ora a considerare alcuni esempi significativi, cominciando dal *caso gravitazionale*, ovvero un sistema di n pianeti orbitanti attorno a una stella S (il sole), nell'approssimazione in cui la stella è considerata fissa. Denotiamo $\mathbf{x}_i = (P_i - S)$, $r_i = \|\mathbf{x}_i\|$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, $r_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\|$. Le forze interne di interazione Newtoniana tra i pianeti sono

$$\mathbf{F}_{ij} = -G\frac{m_i m_j}{{r_{ij}}^2}\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} \ ,$$

e si ha pertanto[36)]

$$V^{(\mathrm{int})} = -\sum_{i,j;\ i<j} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} \ .$$

Le forze esterne sono posizionali e conservative:

$$\mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} = -G\frac{m_i m_S}{r_i^2}\frac{\mathbf{x}_i}{r_i} \ ,$$

e si ha

$$\delta\mathcal{L}_i^{(\mathrm{ext})} = \mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_i = -\mathrm{d}\ G\frac{m_i m_S}{r_i}.$$

---

36) Si tratta di due modi diversi di scrivere che si somma su tutte le coppie diverse ij.

Dunque l'energia potenziale del sistema sarà

$$V = V^{(\mathrm{int})} + V^{(\mathrm{ext})} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} - \sum_i G\frac{m_i m_S}{r_i} \ . \tag{2.77}$$

Come secondo esempio, consideriamo l'*atomo di elio* (ancora nell'approssimazione del nucleo fisso) Denotando con $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ i vettori posizione dei due elettroni e con e la carica dell'elettrone, si ha

$$V(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = -\frac{2e^2}{\|\mathbf{x}_1\|} - \frac{2e^2}{\|\mathbf{x}_2\|} + \frac{e^2}{\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|} \ ,$$

dove $-\frac{2e^2}{\|\mathbf{x}_1\|}$, $-\frac{2e^2}{\|\mathbf{x}_2\|}$ sono dovuti alle forze esterne del nucleo sugli elettroni, e $\frac{e^2}{\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|}$ alla forza di interazione (repulsiva) fra gli elettroni.

Un terzo esempio è fornito dal *corpo rigido pesante*, nell'approssimazione del campo di forze peso costante. L'energia potenziale interna è costante, come visto sopra, e può quindi assumersi nulla. Restano da considerare le forze esterne $\mathbf{F}_i^{(\mathrm{ext})} = -m_i g\mathbf{k}$, per cui si ha

$$\delta\mathcal{L}^{(\mathrm{ext})} = -\sum\nolimits_i m_i g\mathbf{k}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x}_i = -\sum\nolimits_i \mathrm{d}(m_i g z_i) = -\mathrm{d}(g\sum m_i z_i) = -\mathrm{d}V^{(\mathrm{ext})} \ ,$$

con

$$V^{(\mathrm{ext})} = mgz_B \ ,$$

essendo z_B l'altezza del baricentro (si è orientato l'asse z verso l'alto).

2.5.5 Connessione tra proprietà di simmetria e leggi di conservazione

Riportiamo qui una discussione preliminare; una trattazione più completa verrà data nel capitolo sulla meccanica analitica (teorema di Noether). Consideriamo il caso di un sistema di n punti, con forze posizionali derivanti da potenziale, sicchè si abbia

$$\mathbf{F}_i = -\mathrm{grad}_i V \ , \tag{2.78}$$

ovvero $F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}$, $F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$.

Una "traslazione infinitesima" nella direzione del versore $\mathbf{e}$ è definita[37] dalla trasformazione $\mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{x}_i^\varepsilon$, con

$$\mathbf{x}_i^\varepsilon = \mathbf{x}_i + \varepsilon\mathbf{e} \ , \qquad i = 1,\cdots,n \ .$$

Diremo che il sistema è *invariante per traslazione* nella direzione $\mathbf{e}$, se si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} V(\mathbf{x}_1^\varepsilon,\ldots,\mathbf{x}_n^\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \ .$$

---

[37] A differenza del caso della rotazione trattato sotto, la trasformazione qui definita è una vera traslazione per ogni valore $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Segue subito

$$\sum_i (\mathrm{grad}_i\, V) \cdot \mathbf{e} = 0 \ ,$$

ovvero, per la (2.78),

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{R} = 0 \ , \qquad (2.79)$$

ove $\mathbf{R}$ è il risultante delle $\mathbf{F}_i$. Dunque, la proprietà di invarianza per traslazione nella direzione $\mathbf{e}$ comporta che sia nulla la componente del risultante nella stessa direzione, e quindi, per la prima equazione cardinale, che sia costante la corrispondente componente della quantità di moto, $\mathbf{e}\cdot\mathbf{p} = \mathrm{cost.}$ Se poi si ha invarianza per traslazione in ogni direzione, allora $\mathbf{R}$ è nullo, e $\mathbf{p}$ si conserva.

Analogamente una "rotazione infinitesima" attorno alla retta parallela a $\mathbf{e}$, passante per l'origine, è definita[38] dalla trasformazione $\mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{x}_i^\varepsilon$, con

$$\mathbf{x}_i^\varepsilon = \mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_i \ , \qquad i = 1, \cdots, n \ .$$

Dalla proprietà di *invarianza per rotazione* di V (definita in ovvia analogia con l'invarianza per traslazione) segue immediatamente

$$\sum_i (\mathrm{grad}_i V) \cdot \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}_i = 0 \ ,$$

ovvero (ciclando e mettendo in evidenza $\mathbf{e}$)

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{N} = 0 \ ;$$

dalla seconda equazione cardinale si deduce allora che è costante la componente di $\mathbf{M}$ in direzione dell'asse di rotazione: $\mathbf{e} \cdot \mathbf{M} = \mathrm{cost.}$ Se poi si ha invarianza per rotazione attorno a una direzione qualsiasi, allora si ha $\mathbf{N} = 0$ e $\mathbf{M}$ si conserva.

Si vede così che all'invarianza dell'energia potenziale rispetto a una trasformazione è associata la conservazione di una corrispondente quantità dinamica, secondo lo schema

$$\text{traslazione spaziale} \longrightarrow \text{quantità di moto}$$

$$\text{rotazione spaziale} \longrightarrow \text{momento angolare} \ .$$

Analogamente, può dirsi che si ha anche una relazione

$$\text{traslazione temporale} \longrightarrow \text{energia} \ .$$

Infatti, per forze derivanti da potenziale, il caso più generale che possa considerarsi è quello in cui $V = V(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, t)$, ovvero l'energia potenziale dipenda esplicitamente dal tempo (si pensi ad esempio al caso di una forza esterna causata da un punto il cui moto è preassegnato); in tal caso si dirà evidentemente che V è *invariante per traslazioni temporali*, se V non dipende esplicitamente dal tempo. Ma in questa ipotesi si conserva l'energia totale $E = T + V$: dunque, l'invarianza per traslazioni temporali comporta la costanza dell'energia.

---

[38] Tale trasformazione differisce da una rotazione per quantità $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$; in questo senso è detta "infinitesima". Che si tratti di una rotazione sarà forse più chiaro dopo aver visto, in un prossimo paragrafo, la formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi.

2.6 Moti rigidi e moti relativi

Il problema del moto relativo consiste nel determinare le relazioni che intercorrono tra le descrizioni del moto di un punto P fornite da due osservatori in moto l'uno rispetto all'altro. In quest'ambito si ottiene anche la formula fondamentale per la cosiddetta cinematica dei moti rigidi.

2.6.1 Formulazione del problema

Si consideri un sistema di riferimento $\mathcal{S}^* \equiv (O^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ *fisso*, identificato da un'origine e da una terna ortonormale costanti nel tempo, e un secondo sistema di riferimento $\mathcal{S} \equiv (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *mobile.* Si supponga noto il moto di $\mathcal{S}$ rispetto ad $\mathcal{S}^*$, ossia si suppongano noti i vettori $\mathbf{x}_O(t) \equiv (O(t) - O^*), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$, o più precisamente le corrispondenti componenti sulla base fissa $\mathbf{e}_i^*$, cioè le quantità

$$x_{Oi}^*(t) = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{x}_O(t) \ , \qquad R_{ij}(t) = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j(t) \ . \tag{2.80}$$

Si supponga infine noto il moto di un punto P rispetto ad S, ovvero il vettore posizione relativa $\mathbf{x}^{(r)}(t)$ definito da $\mathbf{x}^{(r)} = (P - O)$, o più precisamente le corrispondenti *coordinate relative* $x_i^{(r)}(t)$ definite da

$$(P - O) \equiv \mathbf{x}^{(r)} = \sum x_i^{(r)} \mathbf{e}_i \ .$$

Il problema del moto relativo consiste allora nel determinare il moto di P rispetto ad S^*, ossia il vettore $\mathbf{x}(t)$ dove $\mathbf{x} \equiv (P - O^*)$, o più precisamente nel determinare le corrispondenti coordinate "assolute" x_i^* definite da [39)]

$$\mathbf{x} = \sum x_i^* \mathbf{e}_i^* \ .$$

Analogamente si pone il problema di determinare la relazione tra la *velocità assoluta* e l'*accelerazione assoluta* da una parte, definite da

$$\mathbf{v} = \sum \dot{x}_i^* \mathbf{e}_i^* \ , \qquad \mathbf{a} = \sum \ddot{x}_i^* \mathbf{e}_i^* \ ,$$

e la *velocità relativa* e l'*accelerazione relativa* dall'altra, definite da

$$\mathbf{v}^{(\mathbf{r})} = \sum \dot{x}_i^{(r)} \mathbf{e}_i \ , \qquad \mathbf{a}^{(\mathbf{r})} = \sum \ddot{x}_i^{(r)} \mathbf{e}_i \ ;$$

si noti che $\mathbf{v}^{(\mathbf{r})}$ e $\mathbf{a}^{(\mathbf{r})}$ non sono le derivate rispetto al tempo di $\mathbf{x}^{(r)}$, ma rappresentano la velocità e l'accelerazione come apparirebbero a chi assumesse fisso il sistema di riferimento $\mathcal{S}$ (*osservatore solidale* con il sistema mobile).

---

39) In generale, per ogni vettore $\mathbf{u}$, denoteremo con u_i le componenti sulla base $\mathbf{e}_i$, e con u_i^* le componenti sulla base $\mathbf{e}_i^*$:

$$\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i = \sum_i u_i^* \mathbf{e}_i^* \ .$$

Qui abbiamo poi a che fare con due vettori diversi, $\mathbf{x}^{(\mathbf{r})} = (P - O)$ e $\mathbf{x} = (P - O^*)$.

- **Osservazione.** Come mostrano chiaramente le formule (2.80), la disposizione della terna mobile rispetto a quella fissa è determinata quando siano note le tre coordinate x^*_{Oi}, e i nove coseni direttori R_{ij}. Di questi ultimi però solo tre sono indipendenti, dovendo essere soddisfatte le sei condizioni (indipendenti) di ortonormalità $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $1 \leq i \leq j \leq 3$. La disposizione della terna mobile è dunque individuata da sei parametri, tre per l'origine O e tre per l'orientazione degli assi. Il modo più classico per assegnare l'orientazione degli assi mediante tre parametri è quello dei cosiddetti *angoli di Eulero*, che saranno descritti più avanti. Per una discussione delle proprietà della matrice R_{ij} (matrice di rotazione), si veda l'appendice B.

- **Esercizio 2.16:** Determinare i vettori $(O - O^*)(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ nei casi seguenti: i) S trasla in una direzione fissa, mantenendo costante la direzione degli assi (si pensi ad un treno in moto rettilineo); ii) $\mathcal{S}$ ruota intorno ad un asse fisso (si pensi ad esempio ad una giostra).

Veniamo ora alla connessione col problema del moto rigido.

Definizione 2.1: *Si dice che un sistema di punti esegue un moto rigido se, per ogni coppia di punti P, Q, la mutua distanza $\| (P - Q) \|$ non dipende dal tempo:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| (P - Q) \| = 0 \ .$$

Ora, è evidente che un qualunque insieme di punti che mantengano coordinate costanti rispetto alla terna mobile $\mathcal{S}$ esegue un moto rigido; tale moto viene detto *moto di trascinamento* associato alla terna mobile, ed è caratterizzato dal fatto che ogni punto ha velocità relativa e accelerazione relativa nulle; in effetti, più che come moto di un insieme particolare di punti, il moto di trascinamento appare come moto di un intero spazio "solidale con la terna mobile" (in generale, un vettore che mantenga componenti costanti rispetto al una terna mobile verrà detto *vettore solidale*). Viceversa, non sarebbe difficile vedere che per ogni moto rigido si può determinare una terna mobile $\mathcal{S}$, tale che il moto rigido assegnato appaia come moto di trascinamento ad essa associato.

- **Esercizio 2.17:** Verificare esplicitamente quest'ultima affermazione.

In questa luce il problema del moto rigido appare come un caso particolare del problema del moto relativo, cioè il moto dei punti trascinati dalla terna mobile o solidali, ovvero tali tali che $\mathbf{v}^{(\mathbf{r})} = \mathbf{a}^{(\mathbf{r})} = 0$.

2.6.2 Formula fondamentale per i moti rigidi

Diamo qui la deduzione di una formula importante che caratterizza i moti rigidi. Preliminarmente mostriamo la

Proposizione 2.25: *Si consideri un moto rigido. Ad ogni istante t esiste un unico vettore*

$\boldsymbol{\omega}(t)$ tale che, per ogni vettore $\mathbf{u}$ solidale, si ha

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \ ; \tag{2.81}$$

in particolare, per i versori $\mathbf{e}_i$ di una qualunque terna ortonormale solidale valgono le "formule di Poisson"

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_i \ , \quad i = 1,2,3 \ . \tag{2.82}$$

Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ha l'espressione

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\sum\nolimits_i \mathbf{e}_i \wedge \dot{\mathbf{e}}_i \ , \tag{2.83}$$

dove $\{\mathbf{e}_i\}$ è ancora una qualunque terna ortonormale solidale.

Il vettore $\boldsymbol{\omega}(t)$ è detto *velocità angolare istantanea* al tempo t del moto rigido.

Riportiamo qui di seguito una dimostrazione elementare costruttiva. Una elegante dimostrazione di esistenza (si veda Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*), che fa uso delle nozioni di operatore lineare, operatore aggiunto, derivata di un operatore ... , è riportata in appendice B.

Dimostrazione. Si procede in tre passi.

1. Si osserva anzitutto che la (2.81) e le formule di Poisson (2.82) sono equivalenti: infatti, da un lato queste sono casi particolari della prima; d'altra parte, scrivendo $\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i$, dalle formule di Poisson si ottiene la prima derivando e ricordando che, per ipotesi, è $\dot{u}_i = 0$.
2. Se $\boldsymbol{\omega}$ esiste, allora esso ha necessariamente la forma (2.83), e quindi in particolare è unico. Ciò si vede considerando le relazioni (2.82) come un sistema di equazioni algebriche nell'incognita $\boldsymbol{\omega}$, mentre le $\mathbf{e}_i$ e $\dot{\mathbf{e}}_i$ si considerano note. Per risolvere queste equazioni, cioè "liberare" $\boldsymbol{\omega}$, basta moltiplicare a sinistra ognuna delle (2.82) vettorialmente per $\mathbf{e}_i$, e si trova
$$\mathbf{e}_i \wedge \dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_i \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_i) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) - \mathbf{e}_i(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i) = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{e}_i \boldsymbol{\omega}_i \ ,$$
essendo $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$, $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i$ e avendo usato la formula del doppio prodotto vettore. Sommando su i segue allora $\sum_i \mathbf{e}_i \wedge \dot{\mathbf{e}}_i = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}$.
3. Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ dato dalla (2.83) è effettivamente soluzione,[40] cioè soddisfa le formule di Poisson (2.82). Ciò si controlla immediatamente sostituendo per $\boldsymbol{\omega}$, in (2.82), l'espressione (2.83). Si ottiene così
$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_i = \frac{1}{2}\sum\nolimits_j (\mathbf{e}_j \wedge \dot{\mathbf{e}}_j) \wedge \mathbf{e}_i = \frac{1}{2}\sum\nolimits_j [(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i)\dot{\mathbf{e}}_j - (\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j] \ .$$
Si rielaborano poi questi due termini usando la relazione di ortonormalità $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{ij}$; sostituita direttamente nel primo, essa fornisce $\sum_j (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i)\dot{\mathbf{e}}_j = \dot{\mathbf{e}}_i$, mentre,

[40] La necessità di questa verifica è dovuta al fatto che il procedimento sopra seguito potrebbe a priori avere introdotto una soluzione spuria.

per derivazione, fornisce la relazione di antisimmetria $\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{e}}_i$, che dà per il secondo termine $\sum_j (\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j = -\sum_j (\mathbf{e}_j \cdot \dot{\mathbf{e}}_i)\mathbf{e}_j = -\dot{\mathbf{e}}_i$. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** Poiché il vettore solidale $\mathbf{u}$ ha norma costante, allora si ha $\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u} = 0$ (basta derivare $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \text{cost}$). Come immediata conseguenza della definizione di prodotto vettore, si vede allora che esiste necessariamente un vettore $\boldsymbol{\omega}$ per cui vale la (2.81) (anzi, ne esistono infiniti, perché risulta indeterminata la componente di $\boldsymbol{\omega}$ parallela a $\mathbf{u}$). Il significato della proposizione 2.25 è che si può trovare uno stesso vettore $\boldsymbol{\omega}$ che va bene per tutti i vettori $\mathbf{u}$, e inoltre questo è unico.

Come corollario della proposizione ora dimostrata si ottiene la

Proposizione 2.26 (Formula fondamentale dei moti rigidi): *Per ogni coppia di punti P, Q di un sistema che compie un moto rigido si ha*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(P-Q) = \boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q)\ , \tag{2.84}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q)\ , \tag{2.85}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare istantanea.

Dimostrazione. Basta applicare la (2.81), con $\mathbf{u} = (P-Q)$. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** Il motivo del nome "velocità angolare" attribuito a $\boldsymbol{\omega}$ si comprende considerando il caso elementare delle rotazioni attorno a un asse fisso (asse di rotazione), ad esempio l'asse z; possiamo allora prendere $O = O^*$, e $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^*$. In tal caso è evidente che ogni punto P si muove su un cerchio in un piano ortogonale all'asse di rotazione, con velocità di modulo $d\dot{\vartheta}$, se d è la distanza di P dall'asse, e ϑ è l'angolo tra $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_1^*$. E' allora evidente che si ha

$$\mathbf{v}_P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(P-O) = \boldsymbol{\omega}\wedge(P-O)\ , \tag{2.86}$$

con $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\,\mathbf{e}_3^*$.

Un altro caso molto significativo è quello delle rotazioni attorno a un punto fisso O^* *(moto polare)*; prendiamo allora $O = O^*$. Dalla formula (2.85), con $Q = O$, si ottiene per $\mathbf{v}_P$ ancora la formula (2.86), ove però non solo il modulo, ma anche la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ varia in generale nel tempo; la formula (2.86) ci dice allora che in ogni istante il campo di velocità del moto rigido (o *atto di moto rigido*) concide con quello di un opportuno moto rotatorio attorno a un asse fisso passante per O e diretto come $\boldsymbol{\omega}$ *(asse di istantanea rotazione)*. Per una ulteriore discussione dei moti rigidi in casi più generali si veda l'appendice C.

- **Esercizio 2.18:** Un moto rigido si dice *piano* quando esiste un piano solidale Π, che si muove su un piano fisso Π^*. Si verifichi che in tal caso la velocità angolare è data da

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\mathbf{e}\ ,$$

dove ϑ è l'angolo tra un asse fisso in Π^* e un asse solidale in Π, mentre $\mathbf{e}$ è un versore normale ai due piani. Il caso più comune è quello di un sistema rigido piano (un'asta, un disco), vincolato a un piano prefissato.

2.6.3 Formula di Galileo e teorema di Coriolis

La relazione tra il vettore di posizione assoluta $\mathbf{x} = (P - O^*)$ e il vettore di posizione relativa $\mathbf{x}^{(r)} = (P - O)$ è chiaramente data da

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(r)} + \mathbf{x}_O \ , \tag{2.87}$$

ovvero da $(P - O^*) = (P - O) + (O - O^*)$. Per derivazione seguono senza difficoltà le analoghe relazioni tra velocità assoluta e relativa e tra accelerazione assoluta e relativa.

Per quanto riguarda le velocità, si ha la

Proposizione 2.27 (Formula di Galileo): *La relazione tra velocità assoluta e relativa è data da*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(\mathbf{r})} + \mathbf{v}^{(\mathrm{T})} \ , \qquad \mathbf{v}^{(\mathrm{T})} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) \ . \tag{2.88}$$

Coerentemente con la nozione sopra introdotta di moto di trascinamento, il vettore $\mathbf{v}^{(\mathrm{T})}$ viene detto *velocità di trascinamento*, perché è la velocità (assoluta) dei punti che hanno velocità relativa nulla.

Dimostrazione. Derivando rispetto al tempo la (2.87), ottiene $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}^{(\mathbf{r})} + \mathbf{v}_O$. D'altra parte, da $\mathbf{x}^{(r)} = \sum x_i^{(r)} \mathbf{e}_i$ si ha

$$\dot{\mathbf{x}}^{(\mathbf{r})} = \sum\nolimits_i \dot{x}_i^{(r)} \mathbf{e}_i + \sum\nolimits_i x_i^{(r)} \dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{v}^{(\mathbf{r})} + \sum\nolimits_i x_i^{(r)} \dot{\mathbf{e}}_i \ ;$$

utilizzando le formule di Poisson la conclusione è immediata.

- **Osservazione.** La formula di Galileo si scrive anche nella forma

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P - O) = \mathbf{v}^{(\mathbf{r})} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) \ , \tag{2.89}$$

  che è una naturale generalizzazione della (2.84).

Venendo poi all'accelerazione, si ha la

Proposizione 2.28 (Teorema di Coriolis): *La relazione tra accelerazione assoluta e relativa è data da*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(\mathbf{r})} + \mathbf{a}^{(\mathrm{T})} + \mathbf{a}^{(\mathbf{c})} \ , \tag{2.90}$$

con

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}^{(\mathrm{T})} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P - O) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)] \ , \\ &\mathbf{a}^{(\mathbf{c})} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^{(\mathbf{r})} \ . \end{aligned} \tag{2.91}$$

Il vettore $\mathbf{a}^{(\mathrm{T})}$ viene detto, come è naturale, *accelerazione di trascinamento* (cioè accelerazione dei punti con velocità relativa nulla); il vettore $\mathbf{a}^{(\mathbf{c})}$ viene detto invece *accelerazione complementare*, o *di Coriolis*.

Dimostrazione. Derivando la (2.88) si ha

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}^{(\mathbf{r})}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_O}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{\omega} \wedge (P-O)] \ .$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}^{(\mathbf{r})}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum\nolimits_i \dot{x}^{(r)}\mathbf{e}_i = \sum\nolimits_i \ddot{x}^{(r)}\mathbf{e}_i + \sum\nolimits_i \dot{x}^{(r)}\dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{a}^{(\mathbf{r})} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^{(\mathbf{r})} \\
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_O}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a}_O \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{\omega} \wedge (P-O)] = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P-O) + \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P-O) \ ,
\end{aligned}$$

avendo usato nella prima relazione le formule di Poisson. Così anche si può rielaborare l'ultima relazione utilizzando la (2.89), e si trova

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{\omega} \wedge (P-O)] = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P-O) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P-O)] + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}^{(\mathbf{r})} \ .$$

Basta poi sommare i termini così ottenuti. *Q.E.D.*

2.6.4 Sistemi inerziali; sistemi non inerziali e forze apparenti

Dal teorema di Coriolis otteniamo dunque che, se nel sistema di riferimento “assoluto” $(O^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$ vale la legge di Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \ , \tag{2.92}$$

e si considera un altro sistema di riferimento “mobile” $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, allora per l'accelerazione relativa si ha

$$m\mathbf{a}^{(\mathbf{r})} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}^{(\mathrm{T})} - m\mathbf{a}^{(\mathbf{c})} \ . \tag{2.93}$$

Dunque in un sistema di riferimento relativo si ha ancora formalmente la legge di Newton, pur di aggiungere alla forza “vera” $\mathbf{F}$ le forze “apparenti” (dette anche fittizie, o inerziali) $\mathbf{F}^{(\mathrm{T})} = -m\mathbf{a}^{(\mathrm{T})}$, $\mathbf{F}^{(\mathbf{c})} = -m\mathbf{a}^{(\mathbf{c})}$, proporzionali alla massa del corpo. D'altra parte, tali forze dipendono dal moto del sistema di riferimento e dalla velocità relativa del punto, e si annullano per ogni moto se e solo se il sistema di riferimento trasla uniformemente, perché allora si ha $\mathbf{a}_O = 0$, $\boldsymbol{\omega} = 0$, e dunque $\mathbf{a}^{(\mathrm{T})} = \mathbf{a}^{(\mathbf{c})} = 0$.

Si vede in tal modo che un ipotetico sistema di riferimento assoluto, in cui valga la legge di Newton con una assegnata forza assoluta (indipendente dalla velocità), non è distinguibile da ogni sistema di riferimento che si muova di moto traslatorio uniforme rispetto ad esso: viene così ad esistere una classe di equivalenza di sistemi di riferimento, che sono detti *sistemi inerziali*, perché sono caratterizzati dal fatto che in ciascuno di essi vale la legge di Newton con la medesima forza, sicchè in particolare i punti in assenza di forze si muovono di moto rettilineo uniforme (moto per inerzia).[41] Come è ben noto, la circostanza che le forze di inerzia sono proporzionali alla massa, come avviene per le forze gravitazionali, è alla base del principio di equivalenza di Einstein; e questo sta a fondamento della relatività generale, in cui appunto la classe di equivalenza di sistemi di riferimento viene estesa ai sistemi non inerziali.

- **Osservazione.** E' immediato constatare, usando la definizione di prodotto vettore, che il termine $\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge(P-O))$ che figura nell'accelerazione di trascinamento è uguale a $-\omega^2\mathbf{x}_\perp^{(r)}$, dove $\mathbf{x}_\perp^{(r)}$ è la proiezione del vettore $(P-O)$ sul piano ortogonale al vettore $\boldsymbol{\omega}$. La corrispondente forza apparente $m\omega^2\mathbf{x}_\perp^{(r)}$ è nota con il nome di *forza centrifuga*.

- **Esercizio 2.19:** Verificare che, in conseguenza della rotazione della terra, il termine $\boldsymbol{\omega}\wedge[\boldsymbol{\omega}\wedge(P-O)] = -\omega^2\mathbf{x}_\perp^{(r)}$ nell'accelerazione di trascinamento provoca una diminuzione dell'accelerazione di gravità, passando dal polo all'equatore, proporzionale a $\cos\lambda$, dove λ è la latitudine. Calcolare l'entità di tale variazione nell'approssimazione in cui la terra è sferica.

- **Esercizio 2.20:** Spiegare perché un astronauta in una stazione spaziale orbitante intorno alla terra si trova in condizioni di assenza apparente di gravità. Evidentemente, occorre far uso del fatto che la stazione ha dimensioni molto più piccole della sua distanza dal centro della terra, sicchè localmente il campo gravitazionale può essere considerato uniforme. Invece, gli effetti della gravità non sono trascurabili per oggetti sufficientemente estesi. Così è ad esempio per un filo della lunghezza di qualche centinaio di chilometri che venga lasciato pendere dalla stazione: in assenza di peso tale filo resterebbe floscio, mentre si trova che esso si distende. Su questa idea si basa un programma spaziale, proposto da G.Colombo.

2.6.5 Applicazione: la deviazione dei gravi

Una prova sperimentale della rotazione della terra è fornita dal fatto, già previsto da Galileo, che la traiettoria di un grave che venga lasciato cadere è deviata verso oriente rispetto alla verticale. Tale effetto è dovuto all'accelerazione compementare, e ci proponiamo qui di valutarlo.

Denotiamo qui con $\mathbf{g}$ il risultante dell'accelerazione di gravità e del termine centrifugo $\omega^2\mathbf{r}_\perp$ dovuto all'accelerazione di trascinamento. Un attimo di riflessione mostra che questo risultante (e non la sola gravità) fornisce la direzione della verticale locale (indicata ad esempio dal filo a piombo). Per un osservatore solidale con la terra, la caduta dei gravi è allora regolata dall'equazione

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\mathbf{x}}\ , \tag{2.94}$$

[41] La prima chiara concezione di questa equivalenza di sistemi di riferimento fu vividamente espressa nelle famose pagine del *Dialogo* di Galileo (giornata seconda) in cui sono descritte varie esperienze “sotto coverta di alcun gran naviglio”, da nessuna delle quali si può capire se il naviglio sia in quiete o in moto rettilineo uniforme.

che tiene conto dell'accelerazione complementare, dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare di rotazione della terra.

Questa equazione, essendo lineare non omogenea, sarebbe integrabile in modo esatto; vogliamo tuttavia illustrare un metodo di soluzione approssimata, interessante anche per altri problemi. A tal fine si osserva che, essendo per la terra $|\boldsymbol{\omega}| \simeq 7.3 \times 10^{-5}\,\mathrm{sec}^{-1}$, per velocità iniziali abbastanza piccole il termine di accelerazione complementare sarà piccolo in modulo di fronte a $|\mathbf{g}|$, ed è pertanto spontaneo instaurare un procedimento di approssimazioni successive. Limitandoci qui a considerazioni di carattere euristico, cerchiamo una soluzione della forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \mathbf{x}^{(1)}(t) + \mathbf{x}^{(2)}(t) + \dots \ ,$$

dove $\mathbf{x}^{(j)}(t)$, $(j \geq 0)$ si considera essere dell'ordine di $|\boldsymbol{\omega}|^j$.[42] Per sostituzione nell'equazione (2.94) si ottiene

$$\ddot{\mathbf{x}}^{(0)} + \ddot{\mathbf{x}}^{(1)} + \ddot{\mathbf{x}}^{2}(+) \ldots = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{\mathbf{x}}^{(0)} + \dot{\mathbf{x}}^{(1)} + \dot{\mathbf{x}}^{(2)} + \ldots) \ ,$$

ed eguagliando separatamente i termini dello stesso ordine in $\boldsymbol{\omega}$ si ha il sistema (infinito)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}^{(0)} &= \mathbf{g} \\ \ddot{\mathbf{x}}^{(1)} &= -2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{x}}^{(0)} \\ \ddot{\mathbf{x}}^{(2)} &= -2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{x}}^{(1)} \ . \\ \ldots \end{aligned} \tag{2.95}$$

La forma di questo sistema permette, in linea di principio, di calcolare quante approssimazioni si vogliano (poiché il sistema è ricorsivo, nel senso che ciascuna equazione contiene nel membro di destra solo termini che sono determinati risolvendo le equazioni degli ordini precedenti). La prima equazione (di ordine zero) dà il noto moto dei gravi, con soluzione $\mathbf{x}^{(0)}(t) = \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$ se si considera il caso di dati iniziali con velocità nulla: $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Per valutare l'effetto principale del termine complementare, veniamo all'equazione del primo ordine; sostituendo la soluzione nota per $\mathbf{x}^{(0)}$ si ha $\ddot{\mathbf{x}}^{(1)} = -2t\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{g}$, e dunque $\mathbf{x}^{(1)}(t) = -\frac{t^3}{3}\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{g}$. La soluzione approssimata a meno di termini del secondo ordine in $\boldsymbol{\omega}$ è dunque

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 - \frac{t^3}{3}\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{g} \ , \tag{2.96}$$

e si verifica facilmente che il termine del primo ordine in $\boldsymbol{\omega}$ ha come effetto una deviazione verso oriente.

Per valutare l'entità di tale deviazione si può calcolare

$$\delta \equiv |\mathbf{x}_1(t)| = \frac{t^3}{3}\,|\boldsymbol{\omega}|\,|\mathbf{g}| \cos\lambda \ ,$$

---

[42] Più precisamente, l'ordine di approssimazione dovrebbe venire individuato facendo riferimento a un parametro adimensionale, che può essere $\epsilon = \omega v / g$, ove v è il modulo della massima velocità che si vuole studiare. Con $v = 100\mathrm{m/sec}$, si ha $\epsilon \simeq 10^{-4}$.

dove λ è la latitudine; la deviazione è dunque nulla ai poli e massima all'equatore.

- **Esercizio 2.21:** Si consideri un grave che, partendo con velocità nulla, cade da un'altezza h; verificare che si ha $\delta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\boldsymbol{\omega}\cos\lambda$ (nota: il tempo di caduta può determinarsi senza tener conto della deviazione). In particolare, si determini la deviazione per un grave che cade da un'altezza di 100 m alla latitudine locale.

Un ulteriore calcolo permetterebbe di determinare il termine del secondo ordine in $\boldsymbol{\omega}$, che risulta essere $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \frac{t^4}{6}\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{g})$; l'effetto di questo termine è una deviazione verso sud ed un lieve rallentamento del moto di caduta.

2.6.6 *Applicazione: il pendolo di Foucault*

Una seconda verifica sperimentale della rotazione della terra, effettuata per la prima volta da Foucault nel 1851, consiste nell'osservazione del moto apparente di rotazione del piano di oscillazione di un pendolo.

Cominciamo col ricordare l'equazione di moto per un pendolo ideale (o *pendolo matematico*) muoventesi in un piano verticale fisso. Si tratta di un punto vincolato a muoversi su una circonferenza (di raggio l), soggetto alla forza peso verticale e all'azione di una *reazione vincolare* che gli impedisce di allontanarsi dalla circonferenza.[43] Il modo più semplice per ottenere un'equazione in cui non compaia la reazione vincolare consiste nel considerare l'equazione del momento angolare, prendendo per polo il centro della circonferenza; infatti in tal caso il momento della reazione vincolare è nullo, perché si suppone che essa sia parallela al raggio vettore del punto (cioè abbia proiezione nulla sulla tangente, ovvero non opponga alcuna resistenza al moto "lungo la circonferenza").[44] Denotando con ϑ l'angolo del raggio vettore con la verticale, contato ad esempio in verso antiorario a partire dal basso, si constata allora immediatamente che l'equazione per l'incognita ϑ è data da $l^2\ddot\vartheta = -lg\sin\vartheta$, ovvero

$$\ddot\vartheta + \mu^2 \sin\vartheta = 0 \ , \qquad \mu^2 = \frac{g}{l} \ .$$

Questa equazione del pendolo matematico è stata studiata nel primo capitolo, e si è visto che essa presenta, per energie non troppo grandi, soluzioni periodiche con periodo T dipendente dall'ampiezza (che tende all'infinito avvicinandosi alla separatrice). Per piccole ampiezze, approssimando $\sin\vartheta$ con ϑ, si ha l'equazione approssimante dell'oscillatore armonico con pulsazione μ, ovvero $\ddot\vartheta + \mu^2\vartheta = 0$, e si ha $T = 2\pi/\mu$.

Se ora rimuoviamo il vincolo che il moto avvenga in un fissato piano verticale, e lasciamo invece che il punto possa muoversi senza attrito su una superficie sferica, ot-

---

[43] Materialmente, si può pensare al vincolo come realizzato da un'asta rigida di massa trascurabile, incernierata al centro della circonferenza; in un prossimo paragrafo si dirà come tener conto della massa dell'asta. Una discussione generale delle reazioni vincolari è data nel capitolo sul formalismo Lagrangiano.

[44] Un vincolo di questo tipo si dice *perfetto o ideale*, ed è caratterizzato dal fatto che la reazione vincolare non compie lavoro per spostamenti "conformi ai vincoli".

teniamo il cosiddetto *pendolo sferico*, e si potrebbe facilmente mostrare [45] che ancora, nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, ci si riduce a un oscillatore armonico in un piano orizzontale; la corrispondente equazione di moto è

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\mathrm{or}} + \mu^2 \mathbf{x}_{\mathrm{or}} = 0 \ , \tag{2.97}$$

dove si è indicata con $\mathbf{x}_{\mathrm{or}}$ la proiezione di $\mathbf{x}$ sul piano orizzontale. Se poi si tiene conto della rotazione della terra, è chiaro che nell'equazione di moto (2.97) va aggiunta a secondo membro la proiezione orizzontale della forza di Coriolis,[46] e si ottiene l'equazione di moto

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\mathrm{or}} = -\mu^2 \mathbf{x}_{\mathrm{or}} - 2(\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{x}})_{\mathrm{or}} \ . \tag{2.98}$$

Poiché nell'approssimazione considerata di moto piano si ha $\dot{x}_3 = 0$, è immediato constatare che il termine di Coriolis nella (2.98) si riduce a $-2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ve}} \wedge \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{or}}$, dove il vettore costante noto $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ve}}$ è la proiezione verticale di $\boldsymbol{\omega}$. Si ha così infine l'equazione che fissa lo schema di approssimazione:

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\mathrm{or}} = -\mu^2 \mathbf{x}_{\mathrm{or}} - 2(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ve}} \wedge \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{or}}) \ . \tag{2.99}$$

E' questo un sistema di due equazioni scalari lineari, che potrebbe essere studiato con i noti metodi dell'analisi. E' interessante tuttavia ottenere la soluzione in modo più semplice, ricorrendo ancora una volta a un cambiamento di sistema di riferimento, che permette addirittura di evitare ogni calcolo. Infatti, se si passa dal sistema locale solidale con la terra a un altro sistema di riferimento locale, rotante attorno alla verticale con velocità angolare costante proprio $-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ve}}$, si ottiene che nel nuovo sistema di riferimento l'equazione di moto ha di nuovo esattamente la forma (2.97) dell'oscillatore armonico piano, con ${\mu'}^2 = \mu^2 - \omega_{\mathrm{ve}}^2$ al posto di μ^2 (la piccolissima correzione è dovuta al termine centrifugo); di questa equazione sono ben note le soluzioni. Si vede così che l'insieme dei moti rispetto al sistema di riferimento solidale con la terra è quello dell'oscillatore armonico piano, con sovrimposta una rotazione $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ve}}$; pertanto i movimenti si svolgono come se l'osservatore fosse su una piattaforma rotante con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ve}}$ (e non $\boldsymbol{\omega}$) rispetto a un sistema inerziale. In particolare, se nel sistema inerziale il moto del pendolo si svolge in un piano verticale, allora nel sistema solidale con la terra si vedrà ruotare il piano di oscillazione attorno alla verticale, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ve}} = \mathbf{e}_3 \omega \sin\lambda$, dove λ è la latitudine del punto di osservazione.

2.7 Il corpo rigido

La dinamica del corpo rigido costituisce uno dei problemi classici della meccanica, non facile e ancora non completamente risolto. Ci limitiamo qui ad uno studio ele-

[45] Si veda il capitolo sulle equazioni di Lagrange.

[46] La forza centrifuga è pensata inclusa nella gravità, come spiegato nel paragrafo precedente.

mentare, facendo riferimento alle equazioni generali valide per sistemi di punti, ovvero alle equazioni cardinali e al teorema dell'energia.

Cominceremo studiando la particolare forma che assumono per un corpo rigido le principali quantità meccaniche (quantità di moto, momento angolare, energia cinetica); ciò condurrà spontaneamente all'introduzione dei *momenti di inerzia* e dell'*operatore di inerzia*. Analizzeremo poi il problema, tipico del corpo rigido, della cosiddetta *riduzione* dei sistemi di forze esterne a sistemi più semplici equivalenti. Infine, come applicazione, oltre al caso banale del pendolo composto, considereremo il problema del corpo rigido con un punto fisso (la trottola), ma solo nel caso semplice del moto per inerzia (cioè trascurando il peso); il caso più significativo della trottola pesante è rinviato al capitolo sulle equazioni di Lagrange.

Faremo sempre riferimento, nella nostra trattazione, a sistemi rigidi discreti, cioè composti da un numero finito di punti materiali. Il caso dei corpi rigidi con infiniti punti, in particolare continui, è alquanto delicato, e certamente non si può "dedurre" (nel senso matematico del termine) dal caso finito. Si verifica tuttavia che in tutte le formule rilevanti (espressioni di $\mathbf{p}$, $\mathbf{M}$, T), e nelle equazioni del moto, la struttura particolare del corpo non interviene se non attraverso la massa totale, le coordinate del baricentro, i momenti di inerzia e più in generale l'operatore di inerzia; poiché tutte queste quantità si definiscono agevolmente anche per i sistemi continui, in modo coerente con l'idea intuitiva (fisica) di "passaggio al limite del continuo", è naturale ammettere che le analoghe espressioni o equazioni siano valide anche per i sistemi continui. Ciò non dà luogo ad alcuna difficoltà concreta; tuttavia è bene tenere presente che si tratta di un vero postulato, non deducibile in senso matematico dalla meccanica dei punti materiali.

Nel testo faremo sempre riferimento, per semplicità, al caso discreto; il caso continuo comporta in pratica la sola sostituzione delle sommatorie con integrali (di linea, di superficie, o di volume, a seconda della geometria del corpo), con opportuna densità assegnata.

2.7.1 Quantità meccaniche; momenti di inerzia e operatore d'inerzia

Il calcolo della quantità di moto di un corpo rigido non presenta particolari difficoltà, essendo riconducibile, come già mostrato, alla determinazione della velocità del baricentro. Più delicato è il calcolo del momento della quantità di moto (o momento angolare), e dell'energia cinetica, che tuttavia si possono comunque ricondurre al caso di un corpo rigido con un punto fisso. Infatti, anche nel caso di un corpo rigido libero, si può far uso dei teoremi di scomposizione espressi dalle proposizioni 2.17 e 2.18; il calcolo del momento angolare orbitale e dell'energia cinetica del baricentro è allora banale, mentre per il momento angolare di spin e per l'energia cinetica relativa al baricentro ci si comporta come se il baricentro fosse fisso. Ci riferiamo dunque senz'altro al caso di un corpo rigido con un punto fisso O.

Cominciamo dal calcolo dell'energia cinetica, nel quale interviene naturalmente la nozione di momento di inerzia di un corpo rispetto a un asse.

Definizione 2.2: *Per un sistema di punti materiali $P_1, \dots, P_n$, si dice momento di inerzia I_a rispetto a un assegnato asse a la quantità*

$$I_a = \sum\nolimits_i m_i d_i^2 \ , \tag{2.100}$$

dove d_i è la distanza del punto i–esimo dall'asse.

Vale allora la

Proposizione 2.29: *Per un corpo rigido con un punto fisso O si ha*

$$T = \frac{1}{2} I_\omega \boldsymbol{\omega}^2 \ , \tag{2.101}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare istantanea, e I_ω è il momento di inerzia rispetto all'asse per O parallelo a $\boldsymbol{\omega}$.

Dimostrazione. Essendo $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)$, per definizione di prodotto vettore si ha $\|\mathbf{v}_i\| = \|\boldsymbol{\omega}\| d_i$; basta allora sostituire tale espressione nella definizione $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2$. *Q.E.D.*

Nel caso di rotazione attorno a un asse a fisso, il momento d'inerzia $I_\omega = I_a$ resta costante nel tempo, e l'espressione dell'energia cinetica è semplicemente $T = \frac{1}{2} I_a \dot{\vartheta}^2$, essendo ϑ l'angolo che individua la configurazione del corpo; in generale invece I_ω è variabile nel tempo, perchè varia la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ nel corpo. Una diversa espressione dell'energia cinetica, più utile concretamente in tale ultimo caso, verrà data più sotto, dopo avere introdotto l'operatore di inerzia, che appare in modo molto naturale nell'espressione del momento angolare. Si ha infatti la

Proposizione 2.30: *Il momento angolare $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}_O$ di un corpo rigido rispetto ad un punto fisso O dipende linearmente dalla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, e si esprime nella forma*

$$\mathbf{M} = \mathcal{I} \boldsymbol{\omega} \ , \tag{2.102}$$

dove $\mathcal{I}$ è l'operatore lineare definito da

$$\mathcal{I}\mathbf{u} = \sum\nolimits_i m_i (P_i - O) \wedge [\mathbf{u} \wedge (P_i - O)] \ , \qquad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \ . \tag{2.103}$$

L'operatore $\mathcal{I}$, che denoteremo anche con $\mathcal{I}_O$ quando si voglia mettere in evidenza la sua dipendenza da O, viene detto *operatore d'inerzia* (relativo al polo O). Si osservi che la definizione (al pari della definizione di I_a) è di carattere puramente geometrico, e dunque il fatto che il polo O sia fisso o meno è del tutto irrilevante per la definizione di $\mathcal{I}_O$.

Dimostrazione. Dalla definizione di momento angolare

$$\mathbf{M} = \sum\nolimits_i m_i (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i \ ,$$

con $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)$, si ha

$$\mathbf{M} = \sum_i m_i (P_i - O) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)] \ . \tag{2.104}$$

Questa espressione è evidentemente lineare in $\boldsymbol{\omega}$, e ha proprio la forma data nella proposizione. *Q.E.D.*

La connessione tra energia cinetica e operatore di inerzia è data dalla

Proposizione 2.31: *L'energia cinetica di un corpo rigido con un punto fisso O si esprime nella forma*

$$T = \frac{1}{2}\,\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} \ , \tag{2.105}$$

o equivalentemente

$$T = \frac{1}{2}\,\mathcal{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \ . \tag{2.106}$$

Dimostrazione. Dall'espressione generale dell'energia cinetica, e dalla regola del doppio prodotto misto, si ha

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \, [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)] \cdot [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)] \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_i m_i \, (P_i - O) \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (P_i - O)] \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M} \ . \end{aligned}$$

Dalla (2.102) segue poi la seconda espressione. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** Il confronto fra le due espressioni (2.106) e (2.101) dell'energia cinetica permette di concludere che per ogni asse a si ha

  $$I_a = \mathcal{I}\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_a \ , \tag{2.107}$$

  dove $\mathbf{e}_a$ è il versore di a (basta sostituire $\boldsymbol{\omega} = \|\boldsymbol{\omega}\|\mathbf{e}_\omega$ nella (2.106), e usare l'arbitrarietà di $\boldsymbol{\omega}$). Tale relazione, di carattere puramente geometrico, caratterizza in effetti l'operatore d'inerzia, e potrebbe essere utilizzata come sua definizione.

Due importanti proprietà dell'operatore di inerzia sono espresse dalla

Proposizione 2.32: *L'operatore di inerzia (2.103) è simmetrico, cioè si ha*

$$\mathcal{I}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = \mathcal{I}\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} \qquad \textit{per ogni } \mathbf{u},\, \mathbf{u}' \ ;$$

esso inoltre è definito positivo, ovvero si ha

$$\mathcal{I}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \qquad \textit{per ogni } \mathbf{u} \neq 0 \ ,$$

se il corpo è costituito da almeno tre punti non allineati.

Dimostrazione. Vediamo innanzitutto la simmetria dell'operatore. Dalla definizione di $\mathcal{I}$, ricordando la regola del doppio prodotto misto, si ha

$$\mathcal{I}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' = \sum\nolimits_i m_i(P_i - O)\wedge[\mathbf{u}\wedge(P_i - O)]\cdot\mathbf{u}' = \sum\nolimits_i [\mathbf{u}'\wedge(P_i - O)]\cdot[\mathbf{u}\wedge(P_i - O)] \ ,$$

e la simmetria dell'ultima espressione rispetto a $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ è evidente. Per quanto riguarda la positività dell'operatore, essa è evidente dalla (2.107), essendo, nelle ipotesi fatte, $I_a > 0$ per ogni asse a (equivalentemente si può far uso dell'espressione (2.106) per T, ricordando che T è definita positiva). *Q.E.D.*

- **Osservazione (ellissoide di inerzia).** Come è noto dalla geometria, all'operatore $\mathcal{I}$, simmetrico e definito positivo, è naturalmente associato un ellissoide, definito da
$$\mathcal{I}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 1 \ .$$
Tale ellissoide è detto *ellissoide di inerzia.* Una sua interessante proprietà è la seguente: *sia dato un asse a passante per O, e sia d la distanza da O del punto di intersezione di a con l'ellissoide; si ha allora $\mathcal{I}_a = 1/d^2$.* Infatti, dall'equazione dell'ellissoide, essendo $\mathbf{x} = d\,\mathbf{e}_a$, si ottiene $d^2\mathcal{I}\mathbf{e}_a\cdot\mathbf{e}_a = 1$; la conclusione è immediata.

E' molto utile nelle applicazioni avere l'espressione esplicita della matrice che rappresenta l'operatore di inerzia in una assegnata base ortonormale $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Proposizione 2.33: *In una assegnata base ortonormale $\mathbf{e}_i$ l'operatore di inerzia è rappresentato dalla matrice, detta matrice d'inerzia,*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_{xx} & \mathcal{I}_{xy} & \mathcal{I}_{xz} \\ \mathcal{I}_{xy} & \mathcal{I}_{yy} & \mathcal{I}_{yz} \\ \mathcal{I}_{xz} & \mathcal{I}_{yz} & \mathcal{I}_{zz} \end{pmatrix} \ ,$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{xx} &= I_{e_1} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) \\ \mathcal{I}_{xy} &= -\sum_i m_i x_i y_i \ , \qquad \mathcal{I}_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i \ , \end{aligned} \tag{2.108}$$

ed analoghe espressioni per i restanti elementi, dove x_i, y_i, z_i denotano le coordinate del punto i–esimo.

Dimostrazione. Basta considerare l'espressione (2.104) di $\mathbf{M}$, e far uso della formula del doppio prodotto vettoriale,

$$(P_i - O)\wedge[\boldsymbol{\omega}\wedge(P_i - O)] = |P_i - O|^2\boldsymbol{\omega} - (P_i - O)\,[(P_i - O)\cdot\boldsymbol{\omega}] \ ;$$

scrivendo in coordinate il secondo membro di questa espressione,[47] e sommando, si ottengono immediatamente le (2.108). *Q.E.D.*

---

[47] Ad esempio, per la componente x, si trova $(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_x - x_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z) = (y_i^2 + z_i^2)\omega_x - x_i y_i\omega_y + x_i z_i\omega_z$.

L'espressione della matrice di inerzia richiede dunque il calcolo dei momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati, che compaiono sulla diagonale della matrice, e anche il calcolo degli elementi non diagonali, che prendono il nome di *prodotti d'inerzia*. E' però spontaneo associare al corpo rigido una terna solidale, rispetto alla quale la matrice d'inerzia sia diagonale. E' noto dalla geometria che ciò è possibile grazie al fatto che l'operatore di inerzia è simmetrico: la terna cercata è data dai suoi autovettori, che risultano essere ortogonali (la scelta non è univoca se gli autovalori di $\mathcal{I}$ non sono tutti distinti), mentre gli elementi diagonali della matrice sono dati dai corrispondenti autovalori, che per la positività dell'operatore risultano positivi. Gli assi di questa terna (*terna principale di inerzia* relativa al punto O) vengono detti *assi principali d'inerzia*, mentre i tre elementi diagonali I_1, I_2, I_3, che rappresentano i momenti di inerzia rispetto ai tre assi principali, vengono detti *momenti principali d'inerzia*. Gli assi principali coincidono evidentemente con gli assi di simmetria dell'ellissoide di inerzia; nella base principale l'ellissoide ha equazione $I_1x^2 + I_2y^2 + I_3z^2 = 1$ (forma normale).

Ritornando alle espressioni per il momento angolare e l'energia cinetica, si ha la

Proposizione 2.34: *Sia $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ una terna principale di inerzia per un corpo rigido con un punto fisso O. Si ha allora*[48]

$$\mathbf{M} = \sum\nolimits_j I_j\omega_j\mathbf{e}_j \ , \qquad T = \frac{1}{2}\sum\nolimits_j I_j\omega_j^2 \ , \tag{2.109}$$

dove ω_j sono le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ nella base considerata.

Dimostrazione. Basta usare $\mathcal{I}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{I}\sum_j \omega_j\mathbf{e}_j = \sum_j I_j\omega_j\mathbf{e}_j$. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** Dalla (2.102) si vede che in generale $\mathbf{M}$ e $\boldsymbol{\omega}$ non sono paralleli[49] (lo sono soltanto se $\boldsymbol{\omega}$ è autovettore di $\mathcal{I}$). Si consideri allora il caso di un corpo rigido cui si imponga di ruotare con velocità assegnata attorno a un asse fisso non principale (rotore non equilibrato). Allora $\boldsymbol{\omega}$ è costante, mentre $\mathbf{M}$ muta continuamente di direzione, precisamente ruota solidalmente al corpo. Ciò è chiaro se si fa riferimento a una terna mobile, con asse $\mathbf{e}_3$ coincidente con l'asse fisso di rotazione: infatti, in questa base $\boldsymbol{\omega}$ ha componenti costanti, e d'altra parte anche la matrice d'inerzia, rappresentativa di $\mathcal{I}$, ha elementi costanti; pertanto le componenti di $\mathbf{M}$ nella base mobile sono costanti.

  Il fatto che $\mathbf{M}$ non sia costante si traduce nella necessità di applicare un momento esterno $\mathbf{N}$ non nullo, al fine di tenere in posizione l'asse di rotazione. Tale momento si calcola facilmente: infatti, poichè come si è visto il vettore $\mathbf{M}$ è solidale, si ha $\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{M}$, mentre dalla seconda equazione cardinale si ha $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{M}}$ (il momento da applicare risulta in particolare proporzionale a ω^2).

---

[48] In gran parte dei manuali classici si hanno le notazioni A, B, C in luogo di I_1, I_2, I_3, e di p, q, r in luogo di $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

[49] La (2.105) mostra tuttavia che l'angolo tra essi è sempre acuto.

Concludiamo questo paragrafo con un breve studio della dipendenza del momento di inerzia I_a dall'asse a, e dell'operatore di inerzia $\mathcal{I}_O$ dal polo O. La dipendenza di I_a da a è già stata chiarita per il caso di assi concorrenti; resta il caso di assi paralleli. Tale problema è risolto da un ben noto teorema:

Proposizione 2.35 (Teorema di Huygens–Steiner): *Sia a_B un qualunque asse passante per il baricentro B del sistema, a un asse parallelo ad a_B, e d la loro distanza. Risulta allora*

$$I_a = I_{a_B} + md^2 \ . \tag{2.110}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è particolarmente semplice in un sistema di coordinate adattato, precisamente con origine in B, asse z coincidente con l'asse a_B, e asse a nel semipiano xz con $x > 0$. Si ha allora

$$I_{a_B} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \ , \qquad I_a = \sum_i m_i((x_i - d)^2 + y_i^2) \ ,$$

e dunque, sviluppando il quadrato, $I_a = I_{a_B} + d^2 \sum_i m_i - 2d \sum_i m_i x_i$. Ora, il secondo termine di questa espressione è precisamente md^2, mentre l'ultimo si annulla, essendo proporzionale a x_B che nel sistema di riferimento prescelto è zero. *Q.E.D.*

Un analogo risultato si ottiene per l'operatore di inerzia:

Proposizione 2.36: *Siano $\mathcal{I}_O$ e $\mathcal{I}_B$ gli operatori d'inerzia relativi a un polo generico O e al baricentro B. Si ha allora*

$$\mathcal{I}_O = \mathcal{I}_B + \mathcal{I}_O^B \ , \tag{2.111}$$

con $\mathcal{I}_O^B$ definito da

$$\mathcal{I}_O^B \mathbf{u} = m\,(B - O) \wedge (\mathbf{u} \wedge (B - O)) \ , \qquad \textit{per ogni} \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \ .$$

Si osservi che, come è tipico di tutti questi teoremi, il termine aggiuntivo $\mathcal{I}_O^B$ corrisponde al contributo che darebbe a $\mathcal{I}_O$ il baricentro, se in esso fosse concentrata tutta la massa. Inoltre è chiaro che questa proposizione contiene in particolare la precedente, ove si ricordi che i momenti di inerzia appaiono sulla diagonale della matrice di inerzia.

Dimostrazione. Dalle definizioni

$$\mathcal{I}_O \mathbf{u} = \sum_i m_i\,(P_i - O) \wedge (\mathbf{u} \wedge (P_i - O)) \ , \qquad \mathcal{I}_B \mathbf{u} = \sum_i m_i\,(P_i - B) \wedge (\mathbf{u} \wedge (P_i - B)) \ ,$$

usando l'identità $(P_i - O) = (P_i - B) + (B - O)$, si ottiene immediatamente, per ogni $\mathbf{u}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_O \mathbf{u} = \mathcal{I}_B \mathbf{u} &+ \sum_i m_i\,(B - O) \wedge (\mathbf{u} \wedge (P_i - B)) \\ &+ \sum_i m_i\,(P_i - O) \wedge (\mathbf{u} \wedge (B - O)) + m\,(B - O) \wedge (\mathbf{u} \wedge (B - O)) \ . \end{aligned}$$

E' sufficiente allora osservare che, per la definizione stessa di baricentro, ciascuno dei due termini intermedi si annulla quando si esegue la somma. *Q.E.D.*

- **Esercizio 2.22:** Studiare la relazione tra la matrice di inerzia relativa a due sistemi di coordinate con diversa origine e assi paralleli.

2.7.2 Sistemi equivalenti di forze

Veniamo ora alla nozione di *sistemi di forze equivalenti* (o equipollenti) per un corpo rigido, che si presenta spontaneamente in relazione sia al lavoro delle forze, che è rilevante per il teorema dell'energia, sia alle equazioni cardinali. A questo proposito, cominciamo con l'enunciare una proposizione particolarmente rilevante per la dinamica del corpo rigido:

Proposizione 2.37: *Le equazioni cardinali determinano univocamente la dinamica del corpo rigido (ovvero, come si dice, per un corpo rigido esse sono sufficienti oltre che necessarie).*

Di tale proposizione non diamo qui una dimostrazione formale, limitandoci a osservare che le equazioni cardinali costituiscono un sistema di sei equazioni scalari, ovvero tante quante ne servirebbero per determinare il movimento. Il punto delicato, che qui non affrontiamo, consiste nel mostrare che tali equazioni sono indipendenti.[50)]

Osservando che nelle equazioni cardinali le forze figurano soltanto attraverso il loro risultante e momento risultante, si capisce che non si altera il movimento se si sostituisce all'originario sistema di forze $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ applicate in $P_1, \ldots, P_n$ un altro sistema di forze fittizie $\tilde{\mathbf{F}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{n}}$, applicate in punti fittizi $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_{\tilde{n}}$, purchè tali sistemi abbiano il medesimo risultante e il medesimo momento risultante rispetto a un polo arbitrario. E' allora significativa la

Definizione 2.3: *Due sistemi di forze applicate*

$$(\mathbf{F}_1, P_1), \ldots, (\mathbf{F}_n, P_n)\ , \qquad\qquad (\tilde{\mathbf{F}}_1, \tilde{P}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{F}}_{\tilde{n}}, \tilde{P}_{\tilde{n}})\ ,$$

si dicono equivalenti, se hanno il medesimo risultante e il medesimo momento risultante rispetto a un polo arbitrario: $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$, $\tilde{\mathbf{N}}_O = \mathbf{N}_O$ *per ogni* O.

Si vede tuttavia facilmente che per verificare l'equivalenza è sufficiente considerare un solo polo: si ha infatti che $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$, $\tilde{\mathbf{N}}_O = \mathbf{N}_O$ comporta anche $\tilde{\mathbf{N}}_{O'} = \mathbf{N}_{O'}$.[51)] Si noti

---

50) Per comprendere come tale problema non sia banale, si consideri ad esempio il problema dei due corpi: esso ha sei gradi di libertà, e si potrebbe dunque ritenere di descrivere il movimento usando le sei equazioni cardinali; ci si trova allora davanti al paradosso che le forze interne non contano nelle equazioni cardinali, mentre con evidenza (si pensi al sistema isolato!) esse sono essenziali nella determinazione del movimento.

51) Infatti, vale $\mathbf{N}_{O'} = \sum (P_i - O') \wedge \mathbf{F}_i = \sum [(P_i - O) + (O - O')] \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{N}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R}$, e analogamente $\tilde{\mathbf{N}}_{O'} = \tilde{\mathbf{N}}_O + (O - O') \wedge \tilde{\mathbf{R}}$, donde l'asserto.

in particolare che la quantità scalare

$$I = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_O$$

è indipendente dal polo; per tale motivo essa viene detta *invariante scalare* del sistema di forze.

Si tratta allora di determinare, per un dato sistema di forze, un altro sistema a esso equivalente e il più semplice possibile. A tale scopo mirano appunto i procedimenti elementari corrispondenti a:

1) traslare le forze lungo le proprie rette di applicazione;
2) comporre o decomporre le forze.

Infatti, con tali operazioni, dette *operazioni invariantive elementari*, non si alterano $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{N}_O$, sicchè si costruiscono sistemi equivalenti. Si può anche dimostrare (si veda il trattato di Levi Civita-Amaldi) che, dati due sistemi equivalenti, si può sempre passare dall'uno all'altro con una successione di tali operazioni invariantive elementari.

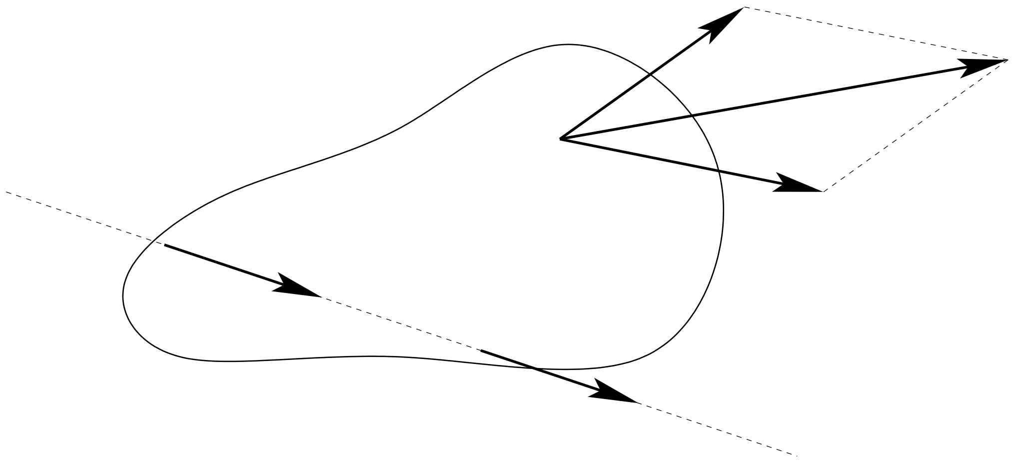


Fig. 2.4

Si dimostra poi il seguente classico risultato:

Proposizione 2.38: *Ogni sistema di forze può essere sempre ridotto a un sistema equivalente formato da una sola forza applicata a un punto opportuno, più una coppia .*

Dimostrazione. Banalmente, se $\mathbf{R}$ e $\mathbf{N}_O$ sono il risultante e il momento risultante del sistema assegnato, basta prendere il sistema equivalente costituito da $\mathbf{R}$ applicato in O, e una qualunque coppia di momento $\mathbf{N}_O$ (comunque applicata). *Q.E.D.*

In casi particolari notevoli si può avere 1) assenza di forze (sistema equilibrato); 2) la sola forza; 3) la sola coppia. Evidentemente in questi tre casi l'invariante scalare $I = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_O$ è nullo; si potrebbe anche mostrare che, viceversa, esso è nullo solo in tali casi.

Come esempio, mostriamo che il sistema delle forze peso $\mathbf{F}_i = -m_i g\mathbf{k}$ applicate ai punti $P_1, \ldots, P_n$ è equivalente al peso totale $-mg\mathbf{k}$ (il risultante) applicato al baricentro. Poiché i due sistemi hanno già uguale il risultante, per costruzione, basta allora mostrare che hanno uguale momento. Denotiamo $-g\mathbf{k} = \mathbf{c}$. Si ha

$\mathbf{N}_O = \sum[(P_i - O)\wedge)m_i\mathbf{c})] = [\sum m_i(P_i - O)]\wedge\mathbf{c} = m(B-O)\wedge\mathbf{c} = (B-O)\wedge m\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{N}}_O$, e i due sistemi di forze sono dunque equivalenti. Ciò è in accordo con il fatto già mostrato, che (anche per un sistema non rigido) l'energia potenziale del sistema delle forze peso è uguale a quella del baricentro, in cui si pensi concentrata tutta la massa.

Oltre al caso di forze parallele e proporzionali alle masse, un altro caso significativo in cui si potrebbe mostrare che il sistema originario è equivalente al risultante applicato al baricentro è quello delle forze gravitazionali (o coulombiane) esercitate su un sistema avente simmetria sferica da uno o più punti esterni. Invece, in assenza di simmetria sferica è necessario introdurre anche la coppia. Tale coppia è responsabile, ad esempio, del moto di precessione dell'asse terrestre, ed è fondamentale anche nello studio del moto della luna.

- **Esercizio 2.23:** Si consideri il modello semplificato piano in cui la luna è rappresentata da un corpo rigido costituito da due punti di ugual massa a distanza mutua fissa d (dipolo), il centro dei quali si muova di moto circolare uniforme attorno a un punto (rappresentante la terra) a distanza l. Calcolare l'energia potenziale gravitazionale nell'approssimazione di dipolo ($d \ll l$), e determinare l'equazione di movimento. Si usi il metodo elementare (sistema di riferimento rotante), e anche il metodo delle equazioni di Lagrange, discusso nel prossimo capitolo.

Come sopra accennato, la nozione di sistemi di forze equivalenti è significativa anche in relazione al calcolo del lavoro e dell'energia potenziale per un corpo rigido. Si ha infatti la

Proposizione 2.39: *Per un arbitrario moto rigido con un assegnato sistema di forze, la potenza $\Pi = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i$ si esprime attraverso il risultante e il momento risultante (rispetto a un qualsiasi polo O) nella forma*

$$\Pi = \mathbf{R}\cdot\mathbf{v}_O + \mathbf{N}_O\cdot\boldsymbol{\omega}\ . \tag{2.112}$$

Dimostrazione. Per la formula fondamentale dei moti rigidi si ha

$$\begin{aligned}\Pi = \sum\nolimits_i \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{v}_i &= \sum\nolimits_i \mathbf{F}_i\cdot[\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\wedge(P_i - O)]\\ &= \mathbf{v}_O\cdot\sum\nolimits_i \mathbf{F}_i + \sum\nolimits_i [\mathbf{F}_i\cdot\boldsymbol{\omega}\wedge(P_i - O)]\\ &= \mathbf{R}\cdot\mathbf{v}_O + \sum\nolimits_i \boldsymbol{\omega}\cdot[(P_i - O)\wedge\mathbf{F}_i] = \mathbf{R}\cdot\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{N}_O\ .\end{aligned}$$

Q.E.D.

2.7.3 Applicazione: corpo rigido con un asse fisso (pendolo composto)

Come prima applicazione si consideri un corpo rigido libero di ruotare attorno a un asse fisso *(asse di sospensione)*. Chiaramente la configurazione del corpo è individuata da una sola coordinata libera, tipicamente l'angolo ϑ tra una direzione solidale, giacente in un piano normale all'asse di sospensione, e una direzione fissa in tale piano.

Nel caso di un corpo pesante sospeso a un asse orizzontale (in figura, l' asse è normale al piano del foglio), si parla di *pendolo composto*. Per descrivere il movimento, occorrerà allora scrivere una equazione nella incognita ϑ, e il problema consiste nel trovare una equazione in cui non figuri la reazione vincolare, che non è nota a priori. Infatti, nello scrivere le equazioni di moto, cioè equazioni cardinali e teorema dell'energia, occorre in linea di principio tener conto sia di forze esterne *attive*, come tipicamente il peso, sia della *reazione vincolare* che mantiene fisso l'asse. Per quanto riguarda tale ultima forza, è naturale assumere che essa abbia potenza nulla, coerentemente con l'idea che essa è applicata ai punti dell'asse, che hanno velocità nulla; pertanto la reazione vincolare, pur non essendo nulla, è tale da non figurare nell'equazione dell'energia.[52)] Così anche è spontaneo assumere[53)] che sia nulla la proiezione del momento della reazione vincolare sull'asse di sospensione, quando si prenda per polo un punto qualunque di tale asse;[54)] dunque, anche dalla seconda equazione cardinale si ottiene un'equazione pura prendendone la proiezione sull'asse di sospensione.

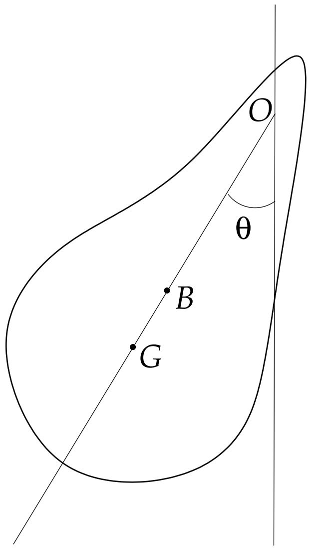


Fig. 2.5

- **Esercizio 2.24:** Si consideri il pendolo matematico: un punto P di massa m, vincolato

52) In generale, è particolarmente interessante dedurre, a partire dalle equazioni fondamentali, delle equazioni in cui non figuri la reazione vincolare. Equazioni di tale tipo si dicono *pure*.

53) Come si vedrà meglio nel capitolo sulle equazioni di Lagrange, l'ipotesi essenziale è in ogni caso che le reazioni vincolari non compiano lavoro (vincoli *ideali*, o *perfetti*).

54) In generale, per un vettore $\mathbf{u}$ applicato a un punto P, la proiezione N_a su un asse a del momento $\mathbf{N}_O$ di $\mathbf{u}$ rispetto a un qualunque punto O dell'asse (che risulta indipendente dalla scelta di O),

$$N_a = \mathbf{e}_a \cdot (P - O) \wedge \mathbf{u} \ ,$$

è detta *momento di* $\mathbf{u}$ *rispetto all'asse.*

a un cerchio verticale, di centro O raggio l (si pensi ad esempio a un punto all'estremo di un'asta di massa trascurabile, fissata all'altro estremo O). Il moto del punto P è allora retto dall'equazione

$$m\mathbf{a} = -mg\mathbf{k} + \mathbf{\Phi} \ , \tag{2.113}$$

dove $\mathbf{\Phi}$ è la forza di reazione vincolare.

Per l'incognita $\vartheta(t)$, se ϑ è l'angolo contato in senso antiorario dalla verticale discendente, si ottenga l'equazione pura

$$l\ddot{\vartheta} + g\sin\vartheta = 0 \ , \tag{2.114}$$

nei tre modi seguenti:
1) proiettando l'equazione (2.113) sul versore trasverso $\mathbf{e}_\vartheta$;
2) scrivendo l'equazione del momento angolare, e prendendo per polo il punto di sospensione O (l'unica componente non nulla è quella sull'asse di sospensione);
3) scrivendo l'equazione dell'energia.

In effetti, col metodo dell'energia si ottiene l'equazione del primo ordine

$$\frac{1}{2}l\dot{\vartheta}^2 - g\cos\vartheta = E \ , \tag{2.115}$$

che è una conseguenza dell'equazione (2.114). Viceversa, la (2.114) può ottenersi dalla (2.115) per derivazione.

Tornando al problema del pendolo composto, denotiamo con I il momento d'inerzia rispetto all'asse di sospensione, con l_B la distanza del baricento da tale asse, e con m la massa totale del corpo; potendosi pensare il peso applicato al baricentro, dalla seconda equazione cardinale per proiezione sull'asse di sospensione otteniamo l'equazione

$$I\ddot{\vartheta} + mgl_B\sin\vartheta = 0 \ . \tag{2.116}$$

Per confronto con l'equazione (2.114) del pendolo matematico di lunghezza l, si vede dunque subito che il pendolo composto si comporta come un pendolo matematico di lunghezza equivalente

$$l = \frac{I}{ml_B} \ ,$$

che viene chiamata usualmente *lunghezza ridotta* del pendolo composto. L'asse parallelo all'asse di sospensione, a distanza l da esso, nel sempipiano definito dall'asse di sospensione e dal baricentro, viene detto *asse di oscillazione.*

- **Esercizio 2.25:** Si dimostri che per un pendolo composto si hanno le seguenti proprietà:
  i. si ha $l_B < l$;
  ii. gli assi di oscillazione e di sospensione possono essere scambiati, nel senso che, se si sospende il corpo per l'asse di oscillazione, il nuovo asse di oscillazione coincide col vecchio asse di sospensione.

  Svolgimento. La prima proprietà si dimostra ricordando che, denotando con I_B il momento d'inerzia rispetto a un asse parallelo all'asse di sospensione passante per il baricentro, per il noto teorema di Huygens si ha $I = I_B + ml_B^2$. Dunque, definendo δ mediante la relazione $I_B = m\delta^2$ e ricordando $I = ml_Bl$, si ottiene

$$l_Bl = \delta^2 + l_B^2 \ ;$$

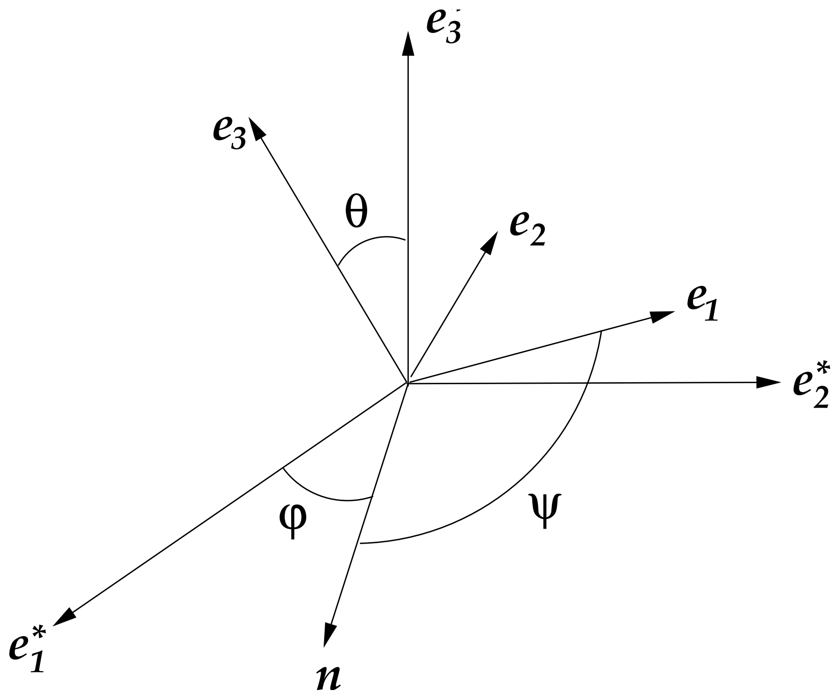
da questa segue allora $l = l_B + \delta^2/l_B > l_B$, che è appunto la prima proprietà. Per dimostrare la seconda, facciamo uso della relazione appena trovata, scrivendola nella forma $l_B\,(l - l_B) = \delta^2$. Osserviamo poi che, se si scambiano gli assi di oscillazione e di sospensione, si avranno a priori due nuove quantità l', l'_B in luogo delle vecchie l, l_B, mentre δ resterà immutata, essendo una proprietà intrinseca del corpo, e si avrà pertanto

$$l_B(l - l_B) = l'_B(l' - l'_B) \ .$$

Da questa relazione, usando la relazione evidente $l'_B = l - l_B$, per sostituzione si trova allora $l_B = (l' - l + l_B)$, ovvero $l' = l$.

2.7.4 *Applicazione: corpo rigido con un punto fisso (questioni elementari)*

Per un corpo rigido con un punto fisso è spontaneo prendere i sistemi di riferimento fisso e mobile con origine comune nel punto fisso assegnato; come già si è detto, tre parametri sono allora sufficienti per individuare la disposizione della terna solidale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, e quindi la configurazione del corpo, rispetto alla terna fissa $(\mathbf{e}^*_1, \mathbf{e}^*_2, \mathbf{e}^*_3)$. Illustriamo qui il metodo tradizionale dei cosiddetti *angoli di Eulero*.



Gli angoli di Eulero

Si inizi con l'introdurre (si veda la figura 2.6) l'angolo ϑ formato dagli assi $\mathbf{e}_3$ ed $\mathbf{e}^*_3$; tale angolo viene detto *angolo di nutazione*. Supposto poi $\vartheta \neq 0{,}\pi$, si consideri la retta che risulta dall'intersezione tra i piani $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}^*_1$, $\mathbf{e}^*_2$ (coincidente con la normale al piano $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}^*_3$ passante per l'origine): tale retta viene detta *asse dei nodi*, e può identificarsi mediante il versore $\mathbf{n} = \mathbf{e}^*_1 \cos\varphi + \mathbf{e}^*_2 \sin\varphi$, ove φ, detto *angolo di precessione*, è l'angolo formato dal versore $\mathbf{e}^*_1$ con la direzione dell'asse dei nodi.

Infine si consideri l'angolo ψ tra i versori $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{e}_1$, detto *angolo di rotazione propria.* La terna $(\vartheta, \varphi, \psi)$ è sufficiente a determinare la posizione della terna $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ rispetto a quella fissa $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$. In effetti, si parta con le due terne coincidenti, e si operino tre rotazioni nel modo seguente: si tenga fisso l'asse $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^*$, e si ruoti di un angolo φ (precessione), portando l'asse $\mathbf{e}_1$ a coincidere con l'asse dei nodi $\mathbf{n}$; si tenga fisso $\mathbf{e}_1$, e si ruoti di un angolo ϑ (nutazione); infine, si tenga fisso $\mathbf{e}_3$ e si ruoti di un angolo ψ (rotazione propria).[55)]

Lo studio della dinamica del corpo rigido con un punto fisso richiederebbe allora di scrivere tre equazioni del secondo ordine nelle tre incognite ϑ, φ, ψ. Rinviando al capitolo sulle equazioni di Lagrange la scrittura esplicita di queste equazioni e il loro studio in un caso significativo (la *trottola di Lagrange*), ci limitiamo qui a un breve studio orientato al caso particolarmente semplice (benché non banale) di assenza di forze esterne (moto per inerzia, o *caso di Eulero–Poinsot*).

Scelta preliminarmente come terna mobile una terna principale di inerzia, l'idea centrale è quella di proiettare in ogni istante su di essa l'equazione per il momento angolare $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}^{(\mathrm{ext})}$ (seconda equazione cardinale);[56)] si sfrutta in questo modo il fatto che è costante la matrice di inerzia, e quindi in particolare sono costanti i momenti di inerzia rispetto agli assi di riferimento.

Si ha la

Proposizione 2.40 (Equazioni di Eulero): *Nel moto di un corpo rigido con un punto fisso sono soddisfatte le equazioni*

$$\begin{cases} I_1\dot\omega_1 - (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 = \mathbf{N}_1^{(\mathrm{ext})} \\ I_2\dot\omega_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_1\omega_3 = \mathbf{N}_2^{(\mathrm{ext})} \\ I_3\dot\omega_3 - (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 = \mathbf{N}_3^{(\mathrm{ext})} \end{cases} . \tag{2.117}$$

---

55) Queste operazioni possono esprimersi mediante tre matrici di rotazione R_φ, R_ϑ e R_ψ; dunque mediante la matrice $R(\vartheta, \varphi, \psi) = R_\psi R_\vartheta R_\varphi$ è possibile calcolare direttamente le posizioni dei versori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ della terna mobile rispetto a quelli $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ della terna fissa. E' evidente che le tre matrici R_φ, R_ϑ e R_ψ sono date rispettivamente da

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

A conti fatti, risulta allora che la matrice $R(\vartheta, \varphi, \psi) = R_\psi R_\vartheta R_\varphi$ è data da

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta & \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta & \sin\psi\sin\vartheta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta & \cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} .$$

56) Come nel caso del pendolo composto, si assume che la reazione vincolare abbia momento nullo rispetto al polo O.

Dimostrazione. Ricordando $\mathbf{M} = \sum_j I_j \omega_j \mathbf{e}_j$ e le formule di Poisson per $\dot{\mathbf{e}}_j$, si ha anzitutto

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_j I_j \dot{\omega}_j \mathbf{e}_j + \sum_j I_j \omega_j (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_j) = \sum_j I_j \dot{\omega}_j \mathbf{e}_j + \sum_{j,k} I_j \omega_j \omega_k (\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_j) \ .$$

E' allora immediato proiettare l'equazione sui versori $\mathbf{e}_j$, perché basta ricordare che si ha ad esempio $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$. *Q.E.D.*

A queste equazioni si dovrebbero affiancare tre equazioni che esprimono le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ in termini dei tre angoli di Eulero; si ottengono così per sostituzione tre equazioni scalari del secondo ordine, che (per forze esterne assegnate anch'esse in funzione degli angoli di Eulero) costituiscono le effettive equazioni di moto.

Si osserva però che nel caso libero, o anche nel caso di corpo pesante sospeso nel baricentro, in cui $\mathbf{N}^{(\mathrm{ext})} = 0$, le tre equazioni di Eulero si presentano come equazioni chiuse del primo ordine per ω_1, ω_2 e ω_3, indipendentemente dal legame di tali componenti con gli angoli di Eulero. Queste equazioni si possono direttamente utilizzare per ottenere alcune interessanti informazioni sul moto.

a) moto per inerzia (o di Eulero–Poinsot)

Un primo caso particolarmente semplice è quello di un corpo i cui momenti principali d'inerzia coincidono, ovvero l'ellissoide di inerzia è sferico:

$$I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$$

(ad esempio una sfera o un cubo omogeneo). Infatti, in tal caso (senza nemmeno bisogno di introdurre la terna mobile, né tantomeno usare le equazioni di Eulero) si ha direttamente la relazione di semplice proporzionalità

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega} \ ,$$

sicchè dalla costanza di $\mathbf{M}$ segue che anche $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}/I$ è costante. Pertanto, il moto per inerzia è un moto rotatorio uniforme attorno a un asse fisso nello spazio.

Un altro caso particolarmente interessante è quello in cui il corpo ha *struttura giroscopica*, cioè due dei momenti principali d'inerzia coincidono, ovvero l'ellissoide d'inerzia è di rotazione (un cilindro, un prisma regolare, un cono). Consideriamo ad esempio il caso in cui si abbia simmetria rispetto all'asse z, cioè sia $I_1 = I_2 \neq I_3$.

In tal caso non avviene più che $\boldsymbol{\omega}$ sia costante, ma si ha la

Proposizione 2.41: *Nel moto di un corpo rigido con un punto fisso, avente struttura giroscopica attorno all'asse $\mathbf{e}_3$, si hanno le seguenti proprietà:*
i. la norma $\|\boldsymbol{\omega}\|$ di $\boldsymbol{\omega}$ è costante;
ii. il momento angolare $\mathbf{M}$, la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ e l' asse $\mathbf{e}_3$ sono complanari;
iii. sono costanti gli angoli tra due qualsiasi di tali vettori (in particolare sono costanti le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ su $\mathbf{e}_3$ e su $\mathbf{M}$).

Dimostrazione. Anzitutto, dalle equazioni di Eulero, che in questo caso si scrivono

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3)\,\omega_2\omega_3 = 0 \\ I_1\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 = 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 = 0 \ , \end{cases}$$

segue $\omega_3 = \mathrm{cost}$, e $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \mathrm{cost}$,[57] e, pertanto, si ha anche che $\|\boldsymbol{\omega}\| = \mathrm{cost}$. D'altra parte, l'angolo α tra $\mathbf{M}$ e $\boldsymbol{\omega}$ è costante, dal momento che

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega}}{\|\mathbf{M}\|\ \|\boldsymbol{\omega}\|} = \frac{2E}{\|\mathbf{M}\|\ \|\boldsymbol{\omega}\|} \ ;$$

l' angolo β tra $\boldsymbol{\omega}$ ed $\mathbf{e}_3$ è costante, dato che

$$\cos\beta = \omega_3/\|\boldsymbol{\omega}\| \ ;$$

l'angolo γ tra $\mathbf{M}$ ed $\mathbf{e}_3$ è pure costante, perché

$$\cos\gamma = M_3/\|\mathbf{M}\| = I_3\omega_3/\|\mathbf{M}\| \ .$$

Inoltre, i tre vettori $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{e}_3$ sono complanari, poiché si ha

$$\det \begin{vmatrix} I_1\omega_1 & I_1\omega_2 & I_3\omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Q.E.D.

Il moto è allora descritto dalla

Proposizione 2.42: *Si consideri il moto di un corpo rigido con un punto fisso, avente struttura giroscopica attorno all'asse $\mathbf{e}_3$. Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ ruota uniformemente attorno alla direzione fissa di $\mathbf{M}$, descrivendo un cono $\mathcal{C}'$ di rotazione; analogamente, la traccia di $\boldsymbol{\omega}$ nel corpo è un cono di rotazione $\mathcal{C}''$, descritto anch'esso con velocità costante. I due coni rotolano l'uno sull'altro senza strisciare.*

Tali coni sono detti *coni di Poinsot*; il moto del vettore $\boldsymbol{\omega}$ su ciascuno dei due coni si dice moto di *precessione*.

Dimostrazione. Il fatto che in entrambi i sistemi di riferimento $\boldsymbol{\omega}$ giaccia su un cono corrisponde semplicemente al fatto che gli angoli tra $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{M}$, e tra $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{e}_3$ sono costanti. Il fatto che i due coni rotolino senza strisciare corrisponde al fatto che i punti sull'asse passante per O e parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, cioè sull'asse di istantanea rotazione, hanno velocità nulla. Resta da stabilire che la rotazione è uniforme. Per vederlo, scriviamo innanzitutto

$$\boldsymbol{\omega} = \omega'\mathbf{e}_M + \omega''\mathbf{e}_3 \ ,$$

dove $\mathbf{e}_M$ è il versore di $\mathbf{M}$ (tale decomposizione è possibile per la complanarità dei tre vettori), osservando che ω' e ω'' sono costanti. Si vede allora facilmente che il piano Π

[57] Basta calcolare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 2\,(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2) = 0$.

comune ai tre vettori ruota attorno a $\mathbf{M}$ con velocità angolare costante: infatti, dalle formule di Poisson si ha

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_3 = \omega' \mathbf{e}_M \wedge \mathbf{e}_3 \ .$$

Ciò comporta l'uniformità della precessione su $\mathcal{C}'$. L'uniformità della precessione su $\mathcal{C}''$ si vede poi facilmente descrivendo la rotazione della terna mobile attorno a $\mathbf{e}_3$ in un sistema di riferimento solidale con il piano Π. *Q.E.D.*

- **Osservazione.** La terra è con buona approssimazione un corpo a struttura giroscopica, con ellissoide di inerzia poco schiacciato. Per quanto riguarda il moto di rotazione, si trova che gli angoli tra $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{e}_3$ sono molto piccoli, ma non nulli; con gli argomenti riportati sopra si calcola che il moto di precessione su $\mathcal{C}'$ dovrebbe avere un periodo di circa dieci anni. Tale movimento è stato osservato solo recentemente; il periodo osservato non coincide esattamente col valore previsto, e ciò si interpreta come dovuto al fatto che la terra non è perfettamente rigida.[58)]

Consideriamo infine il caso generale, in cui i tre momenti principali d'inerzia siano tutti distinti, e sia, per fissare le idee, $I_1 > I_2 > I_3$. Una semplice descrizione del moto si ottiene utilizzando gli integrali primi del momento angolare,

$$\mathbf{M} = \text{cost} \ , \tag{2.118}$$

e dell'energia (che coincide con l'energia cinetica),

$$T = \text{cost} \ . \tag{2.119}$$

Riferendosi alla terna principale d'inerzia $\mathbf{e}_i$, e denotando con M_i le corrispondenti componenti del momento angolare rispetto al punto fisso, $\mathbf{M} = \sum M_i \mathbf{e}_i$, e con M il suo modulo (o norma), si ottengono dunque come conseguenza le due equazioni scalari[59)]

$$\begin{aligned} &M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2 \\ &\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E \ . \end{aligned} \tag{2.120}$$

Da queste due equazioni si deduce che il momento angolare giace ad ogni istante sull'intersezione tra un ellissoide ed una sfera; l'esistenza dell'intersezione è poi garantita dalle ovvie disuguaglianze $2EI_3 < M^2 < 2EI_1$, che seguono dall'ordinamento assunto per i momenti principali d'inerzia. L'ellissoide avrà allora semiassi $\sqrt{2EI_1} >$

58) Questo fenomeno di precessione, relativo al moto proprio della terra, non va confuso il familiare moto di precessione dell'asse terrestre attorno alla perpendicolare al piano dell'eclittica (cui è legato il fenomeno della precessione degli equinozi), dovuto invece all'attrazione gravitazionale del sole, ove si tenga conto della non sfericità della terra.

59) Si osservi che dalla costanza di $\mathbf{M}$ non segue la costanza di M_1, M_2, M_3, che sono le sue componenti rispetto ad assi *mobili*; è invece costante la somma dei quadrati di tali componenti, perché esprime il quadrato della norma.

$\sqrt{2EI_2} > \sqrt{2EI_3}$. e, dipendendo dal valore della norma M di $\mathbf{M}$, le intersezioni saranno dei cinque tipi seguenti:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{2EI_3} \ &&: \text{due punti sull'asse } \mathbf{e}_3 \ ; \\ \sqrt{2EI_3} < M &< \sqrt{2EI_2} \ &&: \text{curve chiuse attorno ai punti suddetti;} \\ M &= \sqrt{2EI_2} \ &&: \text{due punti sull'asse } \mathbf{e}_2, \ \text{connessi da separatrici;} \\ \sqrt{2EI_2} < M &< \sqrt{2EI_1} \ &&: \text{curve chiuse attorno all'asse } \mathbf{e}_1 \ ; \\ M &= \sqrt{2EI_1} \ &&: \text{due punti sull'asse } \mathbf{e}_1 \ . \end{aligned}$$

Mostriamo ora che, nei casi in cui le intersezioni si riducono a punti, si hanno in corrispondenza dei moti in cui il corpo ruota, rispetto al sistema fisso, con velocità angolare costante attorno a uno degli assi principali d'inerzia. Consideriamo ad esempio il caso $M = \sqrt{2EI_1}$. In tal caso le componenti del momento angolare sugli assi mobili sono $(M, 0, 0)$, e sono quindi costanti, e ciò significa che il primo asse d'inerzia è parallelo al vettore costante $\mathbf{M}$; ma poichè le componenti sugli assi mobili sono in generale del tipo $M_i = I_i\omega_i$, si ha $\boldsymbol{\omega} = \pm\frac{M}{I_1}\mathbf{e}_1$, sicché si deduce che anche $\boldsymbol{\omega}$ è costante. Si trovano in tal modo sei soluzioni (a due a due simmetriche rispetto al verso di rotazione), che vengono dette *rotazioni stazionarie* attorno agli assi principali d'inerzia.

Le altre intersezioni corrispondenti alle curve sopra descritte danno invece moti più complicati. Una significativa descrizione del movimento è fornita in tal caso dalla seguente

Proposizione 2.43: *L'ellissoide d'inerzia rotola senza strisciare su un piano fisso perpendicolare al momento angolare* $\mathbf{M}$.

Dimostrazione. Si considera l'intersezione ξ tra la direzione del vettore $\boldsymbol{\omega}$ e l'ellissoide, che evidentemente è data da $\xi = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2E}}$ (infatti, da $\frac{1}{2}\mathcal{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = E$ si ha $\mathcal{I}\xi \cdot \xi = 1$). Si osserva poi che

i. il piano tangente all'ellissoide nel punto ξ è perpendicolare al vettore (costante) $\mathbf{M}$;

ii. la distanza di tale piano dal punto fisso O è costante;

iii. la velocità del punto di contatto tra ellissoide e piano è nulla.

Per il punto i, basta mostrare che la normale all'ellissoide in ξ è parallela a $\mathbf{M}$; a tal fine basta calcolare grad$(\mathcal{I}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 2\mathcal{I}\mathbf{x}$, che, valutata nel punto $\xi = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2E}}$, dà $\mathcal{I}\boldsymbol{\omega}\sqrt{\frac{2}{E}} = \mathbf{M}\sqrt{\frac{2}{E}}$. Per il punto ii, si osserva che la distanza del piano dal punto O è data dal prodotto scalare $\frac{\xi\cdot\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} = \frac{1}{\sqrt{2E}} \cdot \frac{\mathcal{I}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}}{|\mathbf{M}|} = \frac{\sqrt{2E}}{|\mathbf{M}|}$, che è costante. Infine, il punto iii segue dal fatto che ξ appartiene all'asse di rotazione, ed ha dunque velocità nulla. *Q.E.D.*

b) cenno al caso generale

Per potere scrivere esplicitamente le equazioni di moto per un corpo rigido con un punto fisso, è necessario fornire un'espressione per le componenti ω_i della velocità angolare in termini degli angoli di Eulero.

Proposizione 2.44: *Le componenti della velocità angolare* $\boldsymbol{\omega}$ *nel riferimento mobile sono espresse in termini degli angoli di Eulero dalle relazioni*

$$\begin{aligned}\omega_1 =& \dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi \\ \omega_2 =& \dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi - \dot\vartheta \sin\psi \\ \omega_3 =& \dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi \ .\end{aligned} \tag{2.121}$$

Dimostrazione. Si deduce innanzitutto che si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi \mathbf{e}_3^* + \dot\vartheta \mathbf{n} + \dot\psi \mathbf{e}_3 \ . \tag{2.122}$$

A tale scopo si scrive la posizione di un punto P solidale come funzione degli angoli di Eulero: $P = P(\varphi, \vartheta, \psi)$; derivando rispetto al tempo si ha allora

$$\mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial\varphi}\dot\varphi + \frac{\partial P}{\partial\vartheta}\dot\vartheta + \frac{\partial P}{\partial\psi}\dot\psi \ .$$

Ciascuno dei tre termini rappresenta la velocità corrispondente a una rotazione, rispettivamente attorno agli assi $\mathbf{e}_3^*$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_3$, e si ha quindi

$$\mathbf{v} = \dot\varphi \mathbf{e}_3^* \wedge (P-O) + \dot\vartheta \mathbf{n} \wedge (P-O) + \dot\psi \mathbf{e}_3 \wedge (P-O) \ ;$$

la (2.122) segue allora per la linearità del prodotto vettore. Infine, le (2.121) si ottengono da questa usando l'espressione esplicita di $\mathbf{e}_3^*$ e di $\mathbf{n}$. *Q.E.D.*

E' ora possibile dare l'espressione dell'energia cinetica $T = \frac{1}{2}\sum I_i \omega_i^2$, sostituendo le espressioni ora trovate di ω_i. La forma di T è particolarmente semplice nel *caso giroscopico*, $I_1 = I_2$, perché è immediato constatare che allora si ha

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot\varphi^2 \sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2) + \frac{I_3}{2}(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2 \ . \tag{2.123}$$

Si noti che nell'espressione dell'energia cinetica non figurano i due angoli φ, ψ. L'assenza del primo è dovuta semplicemente al fatto che la scelta della terna fissa (in particolare dell'asse polare) è arbitraria (e quindi l'angolo di precessione non figura in generale nelle espressioni delle ω_i); l'assenza del secondo è dovuta invece alla assunta proprietà di simmetria del corpo. Come si mostrerà nel capitolo sulle equazioni di Lagrange, l'assenza di tali coordinate si riflette nell'esistenza di due costanti del moto, precisamente $\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_3^*$ e $\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_3$. A partire da questo fatto, è abbastanza facile descrivere il moto di una trottola giroscopica con un punto fisso soggetta alla forza peso (*trottola di Lagrange*). Si veda ad esempio V.I.Arnold, *Meccanica*, parag. 30.

APPENDICE A

Richiami sull' equazione polare delle coniche

Dati un punto F *(fuoco)* e una retta f *(direttrice)* non passante per F, sia k la distanza del fuoco dalla direttrice (Fig.2.7); chiamiamo *asse focale* la normale alla direttrice per il fuoco.

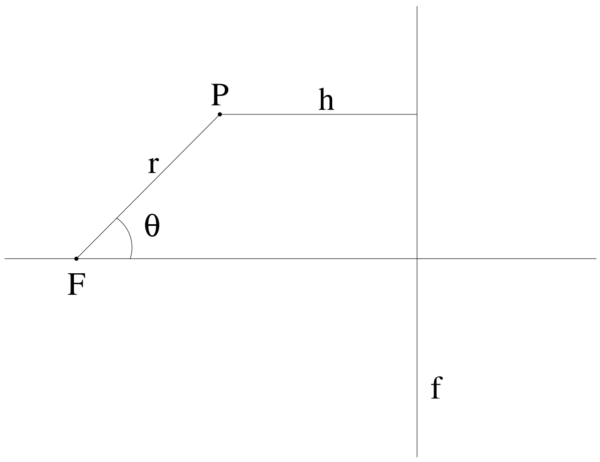


Fig. 2.7

Le coniche possono essere definite come quelle curve del piano, luogo dei punti P per cui è costante il rapporto delle distanze $r = PF$ ed $h = Pf$ dal fuoco e dalla direttice:

$$r/h = e\ .$$

La costante e si dice *eccentricità* della conica, mentre $p = ke$ si dice *parametro*. Le coniche con $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$ si dicono rispettivamente ellissi, parabole, iperboli.

Si consideri un sistema di coordinate polari (r, ϑ), avente per origine il fuoco e per origine delle anomalie ϑ l' asse focale. Dalla relazione $\cos\vartheta = \frac{k-h}{r}$, ovvero $\cos\vartheta = \frac{p}{er} - \frac{1}{r} = \frac{1}{e}(\frac{p}{r} - 1)$ si ottiene la

Proposizione 2.45: *Le coniche sono rappresentate da funzioni $r = r(\vartheta)$ con*

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}\ . \tag{2.124}$$

Si riconosce in particolare $p = r(\pi/2)$.

Veniamo ora alle ellissi (definite da $e < 1$), e mostriamo che esse possono essere caratterizzate come le curve del piano che sono luogo dei punti P per cui è costante la somma delle distanze $r = PF$, $r' = PF'$ da due punti F, F', detti fuochi (Fig. 2.8). Precisamente, si ha la

Proposizione 2.46: *Le curve dei punti P per cui è costante la somma $2a$ delle distanze r e r' da due punti (fuochi):*

$$r + r' = 2a \ , \tag{2.125}$$

sono ellissi, con eccentricità e e parametro p dati da

$$e = \frac{c}{a} \ , \qquad p = \frac{a^2 - c^2}{a} \ ,$$

dove c (con $c < a$) è la semidistanza tra i fuochi.

Dimostrazione. Dal teorema del coseno[60] si ha $r'^2 = r^2 + 4c^2 + 4cr\cos\vartheta$. Eliminando r' con la relazione $r' = 2a - r$ si ottiene subito

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos\vartheta} \ ,$$

e basta confrontare con la (2.124). *Q.E.D.*

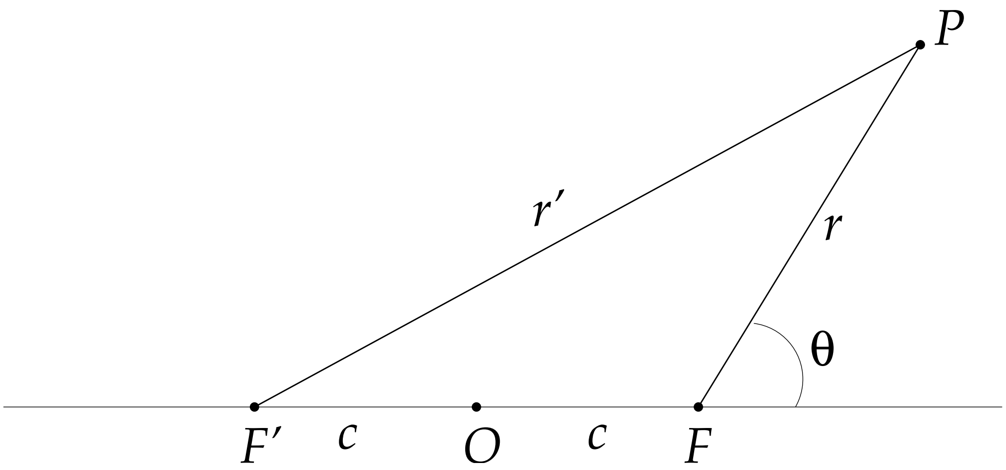


Fig. 2.8

Da questa seconda caratterizzazione si riconosce immediatamente che la ellisse è simmetrica rispetto all'asse focale (che evidentemente contiene entrambi i fuochi), ed anche rispetto all'asse parallelo alla direttrice e passante per il punto medio, O del segmento FF' (centro). E' quindi conveniente introdurre un sistema di coordinate ortogonali con origine in O e asse coincidente con l'asse focale. Si riconosce subito che a ha anche il significato di ascissa dell'intersezione dell'ellisse con l'asse delle x, mentre l'intersezione con l'asse y ha ordinata b data $b^2 + c^2 = a^2$ (e dunque è $b < a$). In termini delle costanti a, b le costanti e, p sono date da

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \ , \qquad p = \frac{b^2}{a} \ . \tag{2.126}$$

[60] E' nient'altro che la relazione $(P - F') = (P - F) - (F' - F)$, prendendo il quadrato della norma.

Un'altra ben nota caratterizzazione delle ellissi è espressa dalla equazione, detta canonica,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{2.127}$$

Per $b = a$ (ovvero $e = 0$), si ha un cerchio. Si ricordino anche le equazioni parametriche dell'ellisse, $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; dalla formula per l'area del cerchio, con un cambiamento di variabili, si ottiene allora, per l'area $\mathcal{A}$ dell'ellisse, $\mathcal{A} = \pi ab$.

APPENDICE B

Operatore di rotazione

Consideriamo un sistema di riferimento "fisso" $\{\mathbf{e}_i^*\}$ e uno "mobile" $\{\mathbf{e}_i\}$, entrambi ortonormali. Resta allora definito l' operatore lineare $\mathcal{R}$ che manda la terna fissa nella terna mobile:

$$\mathbf{e}_i = \mathcal{R}\mathbf{e}_i^* \ , \qquad i = 1, 2, 3 \ ;$$

il modo di operare di R su un generico vettore $\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i^*$ è definito in maniera ovvia per linearità. Nella base fissa, l'operatore $\mathcal{R}$ è rappresentato dalla matrice

$$R_{ij} = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathcal{R}\mathbf{e}_j^* = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j \ ;$$

la matrice R coincide dunque con la *matrice di rotazione* inrodotta nel paragrafo 2.6.1. L'operatore $\mathcal{R}$ viene detto *operatore di rotazione*.

Dal fatto che l'operatore $\mathcal{R}$ manda una terna ortonormale in un'altra anch'essa ortonormale, si deduce immediatamente che l'operatore $\mathcal{R}$ è ortogonale, ovvero soddisfa la proprietà

$$\mathcal{R}^+\mathcal{R} = 1\!\!1 \ , \tag{2.128}$$

dove R^+ denota l'operatore aggiunto,[61] e $1\!\!1$ l'identità. Questa proprietà è di verifica immediata: infatti si ha

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathcal{R}\mathbf{e}_i^* \cdot \mathcal{R}\mathbf{e}_j^* = (\mathcal{R}^+\mathcal{R})\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j^* \ ,$$

e dunque $\mathcal{R}^+\mathcal{R}$ è l'identità. Come è noto, una proprietà caratteristica degli operatori ortogonali, che si potrebbe usare come definizione, è che essi conservano il prodotto scalare (e dunque le lunghezze e gli angoli):[62] $\mathcal{R}\mathbf{u} \cdot \mathcal{R}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Dalla proprietà (2.128) segue immediatamente

$$\det R = \pm 1 \ .$$

Gli operatori ortogonali su $\mathbb{R}^3$ formano un gruppo, denotato abitualmente con $O(3)$. La componente connessa contenente l'identità, caratterizzata da $\det R = +1$, è denotata con $SO(3)$ (S sta per "speciale"); si tratta di un sottogruppo di $O(3)$, detto *gruppo delle rotazioni*.[63]

---

[61] Come è noto, l'operatore aggiunto è definito dalla proprietà $\mathcal{R}^+\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathcal{R}\mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, ed è rappresentato dalla matrice R^t trasposta di R. Si dimostra immediatamente che per ogni coppia di operatori lineari $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ vale $(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)^+ = \mathcal{R}_2^t\mathcal{R}_1^+$.

[62] Se ben si riflette, queste proprietà, che possono apparire astratte, sono invece molto concrete, e traducono proprio la nozione intuitiva di rotazione, nel senso che le relazioni reciproche tra vettori, che siano di tipo metrico (cioè riconducibili al prodotto scalare), non si alterano quando i vettori vengono ruotati.

[63] Si potrebbe definire in maniera intrinseca una rotazione come una applicazione di $\mathbb{R}^3$ in sè biiettiva, con le proprietà di essere lineare e di conservare il prodotto scalare e l'orientazione; in effetti, è facile anche mostrare che la linearità è conseguenza della

Dunque, ogni configurazione della terna mobile (e quindi ogni configurazione di un corpo rigido con un punto fisso) si identifica con un elemento di $SO(3)$. Il gruppo $SO(3)$ costituisce così lo spazio delle configurazioni di un corpo rigido con un punto fisso.[64)]

Consideriamo ora un movimento rotatorio; per quanto detto, esso sarà definito assegnando un operatore ortogonale $\mathcal{R}(t)$ ad ogni tempo t. Mostriamo allora una proprietà significativa[65)] di $\mathcal{R}(t)$, ovvero che l'operatore

$$\mathcal{A} \equiv \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^+$$

è antisimmetrico, cioè è l'opposto del proprio aggiunto: $\mathcal{A}+\mathcal{A}^+ = 0$. Infatti, derivando la relazione di ortogonalità si ha la relazione $\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^+ + \mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^+ = 0$, che rappresenta proprio l'antisimmetria di $\mathcal{A}$, essendo $\mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^+ = (\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^+)^+ = \mathcal{A}^+$.

Si dimostra poi il seguente

Lemma 2.1: *Per ogni assegnato operatore lineare antisimmetrico $\mathcal{A}$ esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che*

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \qquad \textit{per ogni} \ \ \mathbf{u} \ .$$

Dunque, $\mathcal{A}$ si esprime necessariamente nella forma $\mathcal{A}(\cdot) = \boldsymbol{\omega} \wedge (\cdot)$, di prodotto vettore con un ben definito vettore $\boldsymbol{\omega}$.[66)]

Dimostrazione. Si osserva che gli operatori antisimmetrici su $\mathbb{R}^3$ formano uno spazio lineare di dimensione 3 (perché $\mathcal{A}$ è rappresentabile in una base con una matrice 3×3, la quale, essendo antisimmetrica, è a sua volta determinata da 3 sole componenti). D'altra parte il prodotto vettore per un fissato vettore $\boldsymbol{\omega}$ è un operatore antisimmetrico (per le proprietà del prodotto vettore); quindi, gli operatori definiti da un prodotto vettore $\boldsymbol{\omega} \wedge (\cdot)$ formano a loro volta, al variare di $\boldsymbol{\omega}$, uno spazio lineare che è un sottospazio di quello degli operatori lineari antisimmetrici. La dimensione di tale sottospazio è ancora 3 (perché $\boldsymbol{\omega}$ è un arbitrario vettore in $\mathbb{R}^3$), e quindi tale sottospazio coincide, a meno di isomorfismi, con lo spazio degli operatori lineari antisimmetrici. Pertanto, ciascun operatore lineare antisimmetrico $\mathcal{A}$ può rappresentarsi come prodotto vettore con un vettore $\boldsymbol{\omega}$, e viceversa.

Si ha infine la

---

proprietà di conservare il prodotto scalare.

64) Il gruppo $SO(3)$ è un tipico esempio di una varietà differenziabile non lineare. Per le rotazioni attorno a un asse fisso ci si riporta in modo analogo a $SO(2)$, che è monodimensionale ed è nient'altro che un cerchio.

65) Come è ben noto, la nozione di differenziabilità si estende agli operatori; si definisce così la derivata temporale $\dot{\mathcal{R}}(t)$ e si verifica anche che per ogni operatore lineare vale $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{R}^+ = (\dot{\mathcal{R}})^+ \equiv \dot{\mathcal{R}}^+$.

66) Questa proprietà è vera solo in tre dimensioni.

Proposizione 2.47: *Si consideri un moto rigido. Ad ogni istante t esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega}(t)$ tale che, per ogni vettore $\mathbf{u}$ solidale, si ha*

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \ .$$

Dimostrazione. Consideriamo una famiglia $\mathcal{R}(t)$ di rotazioni, e sia $\mathbf{u}(t) = \mathcal{R}(t)\mathbf{u}(0)$ il corrispondente movimento di un qualunque vettore $\mathbf{u}$ solidale. Sarà allora $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathcal{R}}\mathbf{u}(0)$. Ma è anche $\mathbf{u}(0) = \mathcal{R}^{-1}\mathbf{u}(t)$, dove $\mathcal{R}^{-1}$ è l'operatore inverso di $\mathcal{R}$, che, per la proprietà di ortogonalità, coincide con $\mathcal{R}^{+}$. Dunque abbiamo $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^{+}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$. *Q.E.D.*

- **Esercizio 2.26:** Mostrare che, in una base ortonormale arbitraria, all'operatore $\mathcal{A} = \omega\wedge$ corrisponde la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$
(si osservi che in questo modo si determinano concretamente le componeneti di $\boldsymbol{\omega}$ quando sia assegnato il movimento, cioè la matrice $R(t)$ e quindi anche la matrice $A(t)$).