Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Novembre 2025

Esercizio 1

1. Estendere le relazioni
$$P_1 = p_2 \cos q_2, \qquad P_2 = p_1 q_1$$
ad una trasformazione canonica[1]
$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \times (-\pi/2, \pi/2) \ni (p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\Psi}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^4$$

2. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton
$$H = \frac{1}{2}(p_2^2 \cos^2 q_2 + p_1^2 q_1^2) + \frac{1}{2} \log^2 \left(\frac{1 + \sin q_2}{\cos q_2} \right) + \log q_1.$$
Si trovi la soluzione di questo sistema con dati iniziali
$$p_1(0) = 0, \qquad p_2(0) = 1, \qquad q_1(0) = e, \qquad q_2(0) = 0.$$

Esercizio 2
Consideriamo la lagrangiana
$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}(q + \sin t)^2,$$
con q, $\dot{q}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Trovare la soluzione $t \to \bar{\gamma}(t)$ dell'equazione di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali $\bar{\gamma}(0) = 1$, $\dot{\bar{\gamma}}(0) = 0$.

2. Mostrare che per ogni $T > 0$, $\bar{\gamma}$ è un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana
$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$
nella classe di funzioni $C^1([0, T], \mathbb{R})$.

3. Fissato $T > 0$, calcolare la slope function del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito in $\{(t, \alpha) : t \in (0, T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali $\bar{\gamma}(0) = 0$, $\dot{\bar{\gamma}}(0) = \alpha$.

[1] può essere utile ricordare che, per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, si ha $\int \frac{1}{\cos x} dx = \log\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) + C$, dove C è una costante arbitraria.

4. Scrivere le equazioni di Carathéodory e determinare la funzione icononale $S(q,t)$ nella forma

$$S(q,t) = f(q,t) + \int g(t)dt,$$

con $f(q,t)$, $g(t)$ funzioni che devono essere calcolate.