Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
19 Dicembre 2025

Esercizio 1. Si considerino le due funzioni di Hamilton

$$F = |\boldsymbol{p}|^2|\boldsymbol{q}|^2, \qquad G = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2$$

dove $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Scelti $f, g \in \mathbb{R}$, con $f > g > 0$, si consideri l'insieme

   $$\mathcal{M} = \{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^4 : F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = f,\ G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = g\}.$$

   Mostrare che $\mathcal{M}$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.

2. Mostrare che i flussi hamiltoniani $\boldsymbol{\Phi}^t_F$, $\boldsymbol{\Phi}^t_G$ associati a F, G commutano.

3. Consideriamo il flusso generalizzato

   $$\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Phi}^{\tau_1}_F \circ \boldsymbol{\Phi}^{\tau_2}_G(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}).$$

   Mostrare che $\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\tau}}$ definisce una mappa da $\mathcal{M}$ in sé.

4. Scelto un qualunque punto $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$, mostrare che la mappa $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

   $$\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{x}_0)$$

   è un diffeomorfismo locale.

Esercizio 2

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = 2I_1^2 - I_2^2 + \varepsilon[\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin^2(\varphi_1 + 2\varphi_2)],$$

con $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^3$ e $0 < \varepsilon \ll 1$.

1. Determinare una trasformazione canonica

   $$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{\Psi} (J_1, J_2, \Psi_1, \Psi_2)$$

   tale che le nuove coordiante (Ψ_1, Ψ_2) siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Psi^{-1}$.

2. Trovare due integrali primi del sistema hamiltoniano tra loro indipendenti.

3. Descrivere l'andamento delle variabili azione I_1, I_2 e mostrare che vale il principio della media per tutti i tempi.