Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
13 Gennaio 2026

Esercizio 1.

i) Calcolare la soluzione $\gamma(t,\alpha)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}(\dot q^2 - (q+t)^2).$$

e condizioni iniziali

$$q(0) = 0, \qquad \dot q(0) = \alpha \in \mathbb{R}.$$

ii) Mostrare che l'insieme $\{\gamma(t,\alpha)\}_\alpha$, con $0 < t < \pi$, $-1 < \alpha < 1$ è un campo di estremali e calcolare la slope function $\mathcal{P}$.

iii) Scrivere le equazioni di Carathéodory e trovare la funzione iconale $S(q,t)$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\dot{\boldsymbol p} = -\frac{\boldsymbol q + \boldsymbol e_1}{|\boldsymbol q + \boldsymbol e_1|^3} - \omega J \boldsymbol p, \qquad \dot{\boldsymbol q} = \boldsymbol p - \omega J(\boldsymbol q + \boldsymbol e_1) \tag{1}$$

dove

$$\boldsymbol p, \boldsymbol q \in \mathbb{R}^2, \qquad \boldsymbol e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

con condizioni iniziali

$$\boldsymbol p(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt 2}{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol q(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1. Mostrare che il sistema (1) è hamiltoniano trovando una funzione di Hamilton associata.

2. Completare la relazione

$$\boldsymbol Q = R_{\omega t}(\boldsymbol q + \boldsymbol e_1), \qquad R_{\omega t} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\boldsymbol p, \boldsymbol q, t) \overset{\boldsymbol\Psi}{\mapsto} (\boldsymbol P, \boldsymbol Q, t)$$

e scrivere la nuova hamiltoniana $K(\boldsymbol P, \boldsymbol Q, t)$.[1]

[1] *suggerimento:* osservare che $JR_{\omega t} = R_{\omega t}J$, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

3. Trovare la soluzione del sistema hamiltoniano (1) con condizioni iniziali (2).

Esercizio 3. Si consideri la hamiltoniana perturbata

$$H_\varepsilon(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{|\boldsymbol{I}|^2}{2} + \varepsilon f_1(\boldsymbol{\varphi}), \qquad \boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{T}^n,\ n \geq 2$$

con $f_1(\boldsymbol{\varphi}) = \sin(\sum_{j=1}^n \varphi_j)$.

1) Trovare n integrali primi indipendenti e in involuzione.

2) Mostrare che il sistema hamiltoniano associato soddisfa il principio della media.