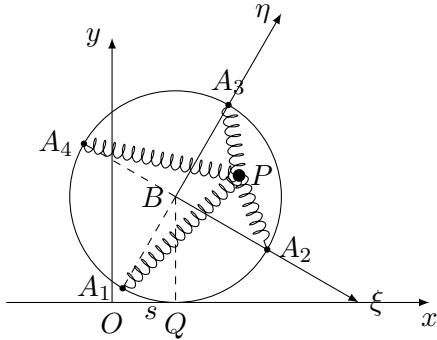


Secondo compitino di Meccanica Razionale

30 Maggio 2025

Esercizio 1. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un anello omogeneo di massa M e raggio $r = 1$ che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox . Del sistema fa parte anche un punto materiale P di massa m collegato da quattro molle uguali di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla a quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4 dell'anello che corrispondono ai vertici di un quadrato. Detto B il centro dell'anello considero il riferimento solidale $B\xi\eta$ con l'asse $B\xi$ che passa da A_2, A_4 e l'asse $B\eta$ che passa da A_1, A_3 (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g .

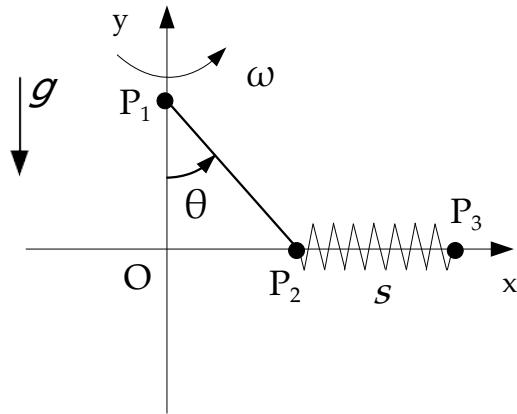


Usiamo come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto di contatto Q tra l'anello e l'asse Ox e le coordinate cartesiane ξ, η del punto P nel riferimento solidale $B\xi\eta$. Nel sistema di riferimento Oxy , assumendo per semplicità che per $s = 0$ il punto A_1 coincida con l'origine O ,

1. scrivere la matrice cinetica del sistema;
2. scrivere la lagrangiana L del sistema;
3. trovare un integrale primo delle equazioni di Lagrange relative a L .

Esercizio 2. In un piano verticale si introduca un sistema di riferimento Oxy . In tale piano consideriamo tre punti materiali P_1 , P_2 e P_3 di ugual massa m . Il punto P_1 è libero di scorrere lungo l'asse Oy , mentre i punti P_2 e P_3 possono scorrere lungo l'asse Ox . Inoltre, P_1 e P_2 sono vincolati agli estremi di un'asta di massa trascurabile di lunghezza ℓ , mentre i punti P_2 e P_3 sono collegati da una molla di costante $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il piano viene fatto ruotare attorno all'asse verticale Oy con velocità angolare costante $\omega > 0$. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione di modulo $g > 0$ e rivolta verso il basso. Tutti i vincoli sono assunti ideali.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto P_3 contata a partire da P_2 e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale (vedi figura).



1. Scrivere la lagrangiana del sistema nel riferimento rotante.
2. Posto $k = 2m\omega^2$, trovare le configurazioni di equilibrio del sistema.
3. Discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio al variare di $J = \frac{g}{\omega^2 \ell}$.