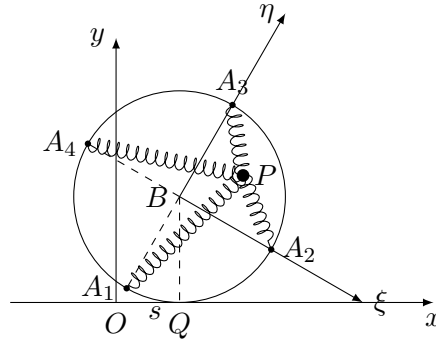


## Secondo compitino di Meccanica Razionale 30 Maggio 2025

**Esercizio 1.** In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un anello omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r = 1$  che può rotolare senza strisciare sull'asse  $Ox$ . Del sistema fa parte anche un punto materiale  $P$  di massa  $m$  collegato da quattro molle uguali di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla a quattro punti  $A_1, A_2, A_3, A_4$  dell'anello che corrispondono ai vertici di un quadrato. Detto  $B$  il centro dell'anello considero il riferimento solidale  $B\xi\eta$  con l'asse  $B\xi$  che passa da  $A_2, A_4$  e l'asse  $B\eta$  che passa da  $A_1, A_3$  (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione  $g$ .

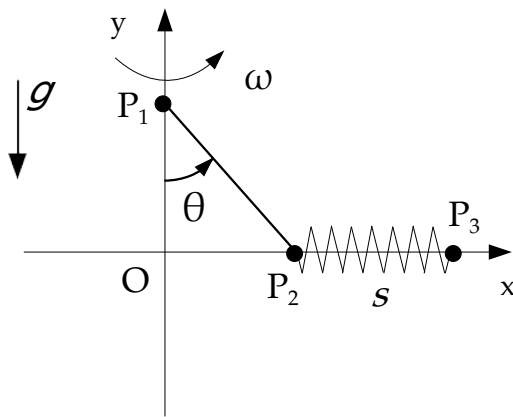


Usiamo come coordinate lagrangiane l'ascissa  $s$  del punto di contatto  $Q$  tra l'anello e l'asse  $Ox$  e le coordinate cartesiane  $\xi, \eta$  del punto  $P$  nel riferimento solidale  $B\xi\eta$ . Nel sistema di riferimento  $Oxy$ , assumendo per semplicità che per  $s = 0$  il punto  $A_1$  coincida con l'origine  $O$ ,

1. scrivere la matrice cinetica del sistema;
2. scrivere la lagrangiana  $L$  del sistema;
3. trovare un integrale primo delle equazioni di Lagrange relative a  $L$ .

**Esercizio 2.** In un piano verticale si introduca un sistema di riferimento  $Oxy$ . In tale piano consideriamo tre punti materiali  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  di ugual massa  $m$ . Il punto  $P_1$  è libero di scorrere lungo l'asse  $Oy$ , mentre i punti  $P_2$  e  $P_3$  possono scorrere lungo l'asse  $Ox$ . Inoltre,  $P_1$  e  $P_2$  sono vincolati agli estremi di un'asta di massa trascurabile di lunghezza  $\ell$ , mentre i punti  $P_2$  e  $P_3$  sono collegati da una molla di costante  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Il piano viene fatto ruotare attorno all'asse verticale  $Oy$  con velocità angolare costante  $\omega > 0$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione di modulo  $g > 0$  e rivolta verso il basso. Tutti i vincoli sono assunti ideali.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa  $s$  del punto  $P_3$  contata a partire da  $P_2$  e l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con la direzione verticale (vedi figura).



1. Scrivere la lagrangiana del sistema nel riferimento rotante.
2. Posto  $k = 2m\omega^2$ , trovare le configurazioni di equilibrio del sistema.
3. Discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio al variare di  $J = \frac{g}{\omega^2 \ell}$ .