

Primo compitino di Meccanica Razionale
29 Aprile 2025

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|,$$

$$f(\rho) = \frac{\log \rho}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^3}.$$

Si supponga che il momento angolare rispetto al centro di forze O sia diverso da zero e si denoti con c la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto.

- i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c .
- ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di c .
- iii) Si considerino le condizioni iniziali

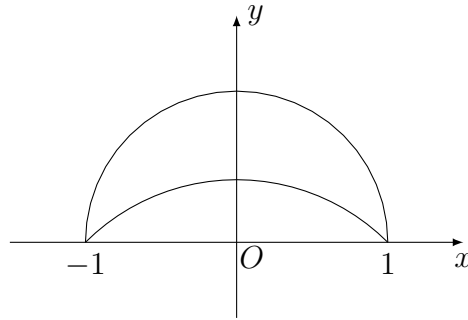
$$\mathbf{x}(0) = (a, 0, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (b, 1/a, 0), \quad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}.$$

Trovare l'insieme dei valori di a e b per cui l'orbita con queste condizioni iniziali è limitata.

Esercizio 2. In un piano dato si fissi un sistema di riferimento Oxy e si consideri in tale piano il corpo rigido omogeneo

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 + \sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

con densità di massa $\sigma = 1$.



1. Trovare le direzioni principali di inerzia relative al polo O ;
2. calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse $O\hat{e}_2$;
3. calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse $O\hat{e}_1$.