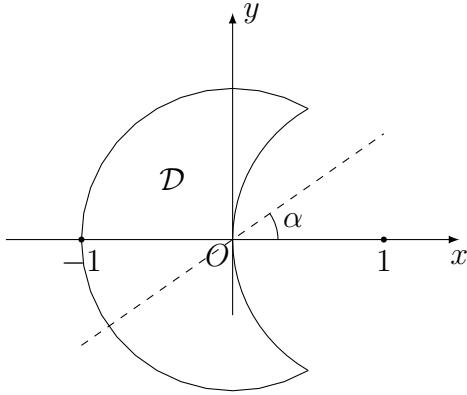


# Compito di Meccanica Razionale

## 16 Luglio 2025

**Esercizio 1.** In un piano si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ . Si consideri il corpo rigido omogeneo  $\mathcal{D}$  di densità  $\sigma > 0$  descritto in figura, ottenuto ritagliando da un disco di raggio  $r = 1$  e centro  $O$  una porzione di un disco di centro  $(x, y) = (1, 0)$  e raggio  $r$ .

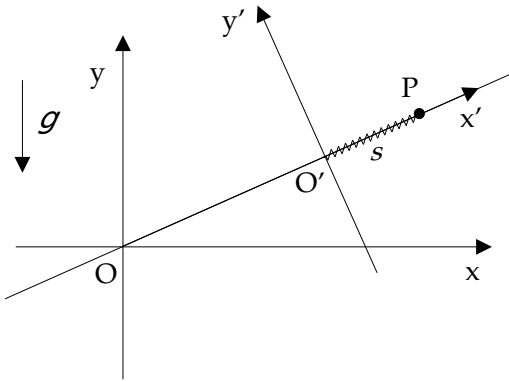


Calcolare il momento assiale del corpo rispetto ad una retta passante per  $O$  che forma un angolo  $\alpha \in (0, \pi/2)$  con l'asse  $Ox$ .

**Esercizio 2.** In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento  $\Sigma = Oxy$  e si consideri una guida rettilinea incernierata in  $O$  e con velocità angolare costante  $\omega = \omega \hat{e}_3$  ( $\omega > 0$ ) rispetto a  $\Sigma$ , dove  $\hat{e}_3$  è il versore ortogonale al piano. Si prenda un punto  $O'$  vincolato a muoversi lungo la guida con un'accelerazione costante  $a > 0$ . Si consideri quindi il sistema di riferimento  $\Sigma' = O'x'y'$  con asse  $O'x'$  lungo la guida. Prendiamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato a muoversi sulla guida e collegato a  $O'$  da una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla (si veda la figura). Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $g > 0$  e rivolta verso il basso (parallela all'asse  $Oy$ ).

Si assuma che tutti i vincoli siano ideali. Si usi come coordinata lagrangiana l'ascissa  $s$  del punto  $P$  lungo la guida e si supponga che al tempo iniziale  $t_0 = 0$  il punto  $O'$  coincida con  $O$  e abbia velocità nulla, e che sempre a  $t_0$  gli assi  $Ox$  e  $O'x'$  coincidano.

- Scrivere la lagrangiana  $L$  nel sistema di riferimento  $\Sigma$ .
- Scrivere la lagrangiana  $L'$  nel sistema di riferimento  $\Sigma'$ .
- Mostrare che le due lagrangiane sono equivalenti trovando una funzione  $F(s, t)$  tale che  $L' = L + dF/dt$ .



**Esercizio 3.** Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$  nello spazio. Un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  ha un estremo  $A$  vincolato a muoversi sull'asse  $Oz$  e l'altro estremo  $C$  vincolato a muoversi sull'asse  $Ox$ . Un'altra asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  ha un estremo  $B$  vincolato a muoversi sull'asse  $Oz$  e l'altro estremo  $D$  vincolato a muoversi sull'asse  $Oy$ . Una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega gli estremi  $A$  e  $B$  delle due aste, mentre un'altra molla uguale alla precedente collega gli estremi  $C$  e  $D$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $g > 0$  e rivolta verso il basso (parallela all'asse  $Oz$ ).

Si assuma che tutti i vincoli siano ideali. Si usino come coordinare lagrangiane l'angolo  $\alpha$  che la direzione  $AC$  forma con l'asse  $Oz$  e l'angolo  $\beta$  che la direzione  $BD$  forma con l'asse  $Oz$  (come riportato in figura).

- Scrivere la lagrangiana del sistema.
- Trovare le configurazioni di equilibrio.
- Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio al variare di  $J = \frac{mg}{k\ell}$ .

