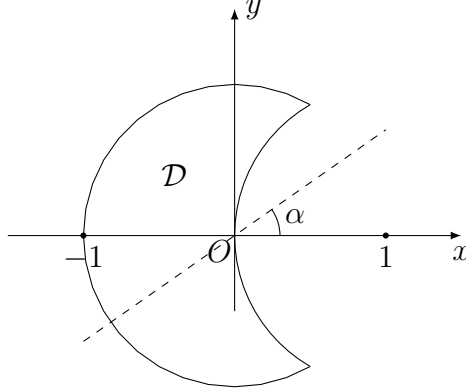


Compito di Meccanica Razionale

16 Luglio 2025

Esercizio 1. In un piano si fissi un sistema di riferimento Oxy . Si consideri il corpo rigido omogeneo \mathcal{D} di densità $\sigma > 0$ descritto in figura, ottenuto ritagliando da un disco di raggio $r = 1$ e centro O una porzione di un disco di centro $(x, y) = (1, 0)$ e raggio r .

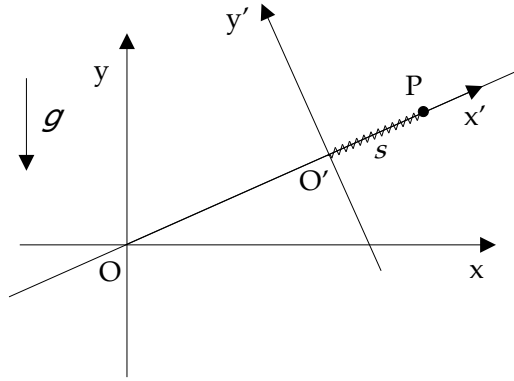


Calcolare il momento assiale del corpo rispetto ad una retta passante per O che forma un angolo $\alpha \in (0, \pi/2)$ con l'asse Ox .

Esercizio 2. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxy$ e si consideri una guida rettilinea incernierata in O e con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_3$ ($\omega > 0$) rispetto a Σ , dove $\hat{\mathbf{e}}_3$ è il versore ortogonale al piano. Si prenda un punto O' vincolato a muoversi lungo la guida con un'accelerazione costante $a > 0$. Si consideri quindi il sistema di riferimento $\Sigma' = O'x'y'$ con asse $O'x'$ lungo la guida. Prendiamo un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi sulla guida e collegato a O' da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (si veda la figura). Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso (parallela all'asse Oy).

Si assuma che tutti i vincoli siano ideali. Si usi come coordinata lagrangiana l'ascissa s del punto P lungo la guida e si supponga che al tempo iniziale $t_0 = 0$ il punto O' coincida con O e abbia velocità nulla, e che sempre a t_0 gli assi Ox e $O'x'$ coincidano.

- i) Scrivere la lagrangiana L nel sistema di riferimento Σ .
- ii) Scrivere la lagrangiana L' nel sistema di riferimento Σ' .
- iii) Mostrare che le due lagrangiane sono equivalenti trovando una funzione $F(s, t)$ tale che $L' = L + dF/dt$.



Esercizio 3. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ nello spazio. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ ha un estremo A vincolato a muoversi sull'asse Oz e l'altro estremo C vincolato a muoversi sull'asse Ox . Un'altra asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ ha un estremo B vincolato a muoversi sull'asse Oz e l'altro estremo D vincolato a muoversi sull'asse Oy . Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega gli estremi A e B delle due aste, mentre un'altra molla uguale alla precedente collega gli estremi C e D . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso (parallela all'asse Oz).

Si assuma che tutti i vincoli siano ideali. Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo α che la direzione AC forma con l'asse Oz e l'angolo β che la direzione BD forma con l'asse Oz (come riportato in figura).

- i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- ii) Trovare le configurazioni di equilibrio.
- iii) Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio al variare di $J = \frac{mg}{k\ell}$.

