Compito di Meccanica Razionale
16 Giugno 2025

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\,,\ \rho = |\boldsymbol{x}|,$$

$$f(\rho) = -2 + \frac{15}{\rho} - \frac{24}{\rho^2} - \frac{5}{\rho^3}.$$

Si supponga che il momento angolare rispetto al centro di forze O sia diverso da zero e si denoti con c la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto.

i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c.

ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot\rho)$ al variare di c.

iii) Si consideri l'orbita con condizioni iniziali

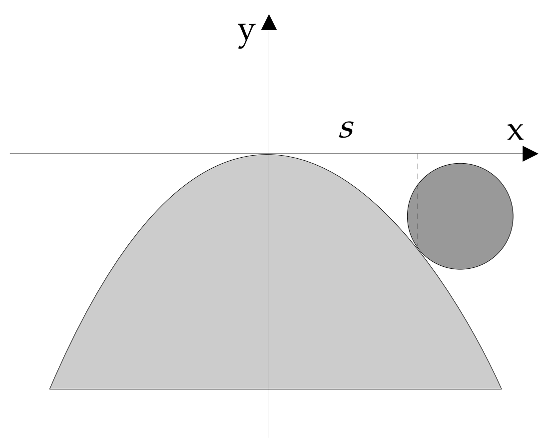
$$\boldsymbol{x}(0) = (2,0,0), \quad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = (a,2,0), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Trovare l'insieme dei valori di a per cui la distanza minima $\rho_{\min}$ dell'orbita da O sia minore di 1.

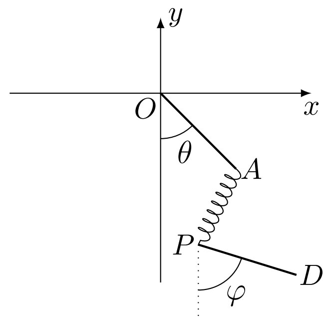
Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Prendiamo una lamina $\mathcal{P}$ omogenea di massa M a forma di settore parabolico, la cui posizione rimane fissa ed è delimitata dalla parabola di equazione $y = -(1/2)x^2$ e la retta $y = -2$. Consideriamo inoltre un disco $\mathcal{D}$ di raggio $r = 1/2$ che rotola senza strisciare sull'arco parabolico della lamina $\mathcal{P}$ (si veda la figura).

i) Calcolare i momenti principali di inerzia della lamina $\mathcal{P}$ rispetto all'origine O.

ii) Usando come coordinata l'ascissa s del punto di contatto del disco con la parabola, calcolare la velocità angolare del disco $\mathcal{D}$.



Esercizio 3. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da due aste omogenee, entrambe di massa m e lunghezza 2ℓ. Un estremo della prima asta è incernierato nell'origine O, mentre l'altro estremo è collegato all'estremo P della seconda asta tramite una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Si assume che tutti i vincoli siano ideali.



Usando come coordinate lagrangiane le coordinate x, y del punto P e gli angoli θ, φ che le due aste formano con la direzione verticale (vedi figura)

i) determinare tutti i punti di equilibrio del sistema;

ii) studiare la stabilità di tali equilibri.