Compito di Meccanica Razionale
15 Settembre 2025

Esercizio 1. Si consideri il moto di un punto di massa $m = 1$ soggetto alla forza centrale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\},\ \rho = |\boldsymbol{x}|,$$

dove

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{2\rho^3}.$$

Trovare il valore della norma del momento angolare $|c|$ per cui si ha un'orbita circolare di raggio $\bar{\rho} = \frac{1}{2}$.

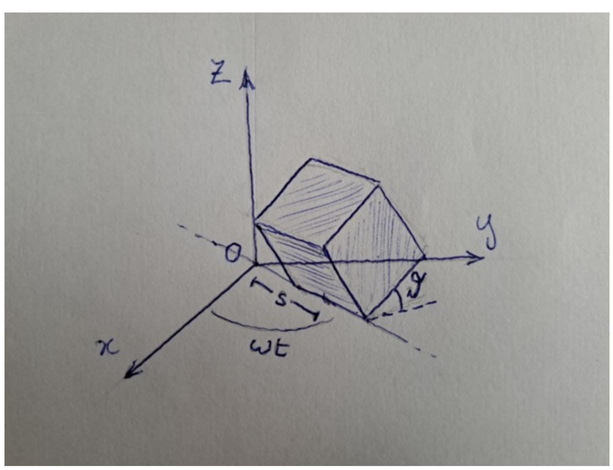
Inoltre, in corrispondenza di tale valore di $|c|$:

1. Scrivere l'equazione della traiettoria utilizzando la formula di Binet.
2. Trovare il valore dell'energia totale E per cui si ha un moto limitato all'interno della corona circolare di raggi

$$\rho_- = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \rho_+ = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dove $\rho_\pm$ sono i punti di inversione del moto unidimensionale corrispondente a questo moto centrale.

Esercizio 2. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente. Una guida rettilinea, incernierata nell'origine O, ruota con velocità angolare costante ω nel piano Oxy. Lungo tale guida può scorrere un lato L, di lunghezza ℓ, di un cubo omogeneo di massa m. Sia s l'ascissa del punto medio del lato che scorre lungo la guida e sia ϑ l'angolo che una faccia del cubo, alla quale appartiene il lato L, forma con il piano Oxy (vedi figura). Calcolare l'energia cinetica del cubo.



Esercizio 3. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ e si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1 e P_2 di massa m collegati da una molla di costante elastica $k > 0$. Il punto P_1 può scivolare sulla parabola

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) : z = y^2 - 1, x = 0\},$$

mentre il punto P_2 può scivolare sulla circonferenza

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

Si usino come coordinate lagrangiane la coordinata y del punto P_1 e l'angolo θ che il punto P_2 descrive sulla circonferenza $\mathcal{C}$, assumendo $\theta = 0$ quando P_2 si trova nel punto di coordinare $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

1. Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange del sistema.

2. Calcolare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.