Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
21 Novembre 2024

Esercizio 1

Sia

$$S(q,t) = \frac{1}{2}q^2 + tq$$

una soluzione delle equazioni di Caratheodory

$$S_q = L_{\dot{q}}(q, \mathscr{P}(t,q), t), \qquad S_t = L(q, \mathscr{P}(t,q), t) - \mathscr{P}(t,q) L_{\dot{q}}(q, \mathscr{P}(t,q), t)$$

per una lagrangiana

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q,t)$$

di un problema meccanico a un grado di libertà.

i) Trovare l'espressione dell'energia potenziale V.

ii) Trovare la famiglia di soluzioni $\gamma(t,\alpha)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali $q(0) = 0, \dot{q}(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) Mostrare che per ogni tempo $\tau > 0$ la funzione $\bar{\gamma}(t) = \gamma(t,1)$ è un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma, \dot{\gamma}, t)dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,\tau], \mathbb{R})$.

iv) Mostrare che per ogni $\tau > 0$ la funzione $\bar{\gamma}(t)$ è anche un minimo forte di $\mathcal{A}_L$ in $C^1([0,\tau], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

i) Si completino le relazioni

$$P_1 = p_1(q_1 + q_2),$$
$$P_2 = p_1 - p_2,$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\mathbf{\Psi}}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$

con $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $(q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, tale che le nuove coordinate non dipendano dai vecchi momenti.

ii) Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_1^2(q_1 + q_2)^2 + (\log(q_1 + q_2) + 1)^2 + (2 - q_2)^2$$

e se ne calcoli la soluzione con condizioni iniziali al tempo $t = 0$

$$p_1(0) = 1, \qquad p_2(0) = 0, \qquad q_1(0) = 0, \qquad q_2(0) = 1$$

considerando il sistema hamiltoniano ottenuto tramite la trasformazione canonica $\mathbf{\Psi}$.