Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
21 Gennaio 2025

Esercizio 1.

Consideriamo la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad V(q) = \frac{4}{q} - \frac{3}{q^2} - 1,$$

con $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

1. Si consideri la soluzione $t \to \gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali
$$\gamma(0) = \frac{3}{4}, \qquad \dot{\gamma}(0) = 0.$$
Trovare gli estremi t_1, t_2 del suo intervallo massimale di definizione.

2. Mostrare che per ogni tempo τ, con $0 < \tau < t_2$, $\gamma(t)$ è un minimo debole del funzionale
$$\mathcal{A}_L = \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$$
nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$.

Esercizio 2.

1. Si dimostri che non è possibile completare le relazioni
$$P_1 = \cos(p_1 + p_2), \qquad Q_2 = \sin(q_1 + q_2)$$
ad una trasformazione canonica
$$V \ni (p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\Psi}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^4 \tag{1}$$
su nessun aperto $V \subseteq \mathbb{R}^4$.

2. Sia $S : U \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^4$ e tale che
$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial(q_1, q_2)\partial(Q_1, P_2)}(q_1, q_2, Q_1, P_2) \neq 0 \quad \text{per ogni } (q_1, q_2, Q_1, P_2) \in U.$$
Si dimostri che le relazioni
$$p_1 = S_{q_1}, \quad p_2 = S_{q_2}, \quad P_1 = -S_{Q_1}, \quad Q_2 = S_{P_2}$$
definiscono implicitamente una trasformazione canonica locale della forma (1).

3. Completare le relazioni

$$P_1 = \cos(q_1 - q_2), \qquad Q_2 = \sin(q_1 + q_2)$$

ad una trasformazione canonica della forma (1) e descrivere esplicitamente un aperto su cui può essere definita tale trasformazione.

Esercizio 3.

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) + \varepsilon \cos(a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3),$$

con $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Mostrare che le variabili azione I_1, I_2, I_3 compiono delle oscillazioni limitate da $C_j\sqrt{\varepsilon}$, per delle costanti positive C_j, $j = 1, 2, 3$.