Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Dicembre 2024

Esercizio 1
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{p}|^2 - \frac{1}{|\boldsymbol{q}|},$$

con $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.

i) Dimostrare che

$$\begin{aligned} L_i &= q_i \left(|\boldsymbol{p}|^2 - \frac{1}{|\boldsymbol{q}|^3} \right) - p_i(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}), \quad i = 1, 2, \\ c &= p_1 q_2 - p_2 q_1, \end{aligned}$$

sono integrali primi del campo vettoriale associato ad H.

ii) Determinare una trasformazione canonica

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \xrightarrow{\Psi} (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}),$$

tale che le nuove coordinate $\boldsymbol{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K nel caso in cui $c = 0$.

Esercizio 2

1. Si consideri la funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon = h(\boldsymbol{I}) + \varepsilon f(\boldsymbol{\varphi}), \qquad \boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{T}^2$$

dove

$$h(\boldsymbol{I}) = I_1^2 + \frac{1}{2} I_2^2, \qquad f(\boldsymbol{\varphi}) = \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Scrivere la forma normale non risonante per H_ε fino al secondo ordine in ε (incluso).

2. Si consideri adesso la funzione di Hamilton

$$K_\varepsilon = h(\boldsymbol{I}) + \varepsilon f(\boldsymbol{\varphi}), \qquad \boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{T}^3$$

dove

$$h(\boldsymbol{I}) = I_1^2 + \frac{1}{2}(I_2^2 + I_3^2), \qquad f(\boldsymbol{\varphi}) = \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Scrivere la forma normale risonante per K_ε all'interno della risonanza semplice $|2I_1 - I_2 - I_3| = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ fino al primo ordine in ε.