Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
16 Aprile 2025
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^2 + q\dot q + q^2 + q\cos t, \qquad q, \dot q \in \mathbb{R}.$$

i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar\gamma(0) = 1, \qquad \dot{\bar\gamma}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar\gamma$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot\gamma(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,T], \mathbb{R})$.

iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t,q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t,\alpha) : t \in (0,T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \qquad \dot\gamma_\alpha(0) = \alpha.$$

Esercizio 2. Trovare variabili azione-angolo (I, φ) per l'oscillatore armonico unidimensionale, definito dall'equazione differenziale

$$m\ddot x + kx = 0, \qquad m, k > 0.$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi),$$

con

$$\begin{aligned} h(I) &= I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3, \\ f(I,\varphi) &= I_1 I_2[\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\varphi_1 \sin(2\varphi_2 - \varphi_3)], \end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ i = 1,2,3, \quad \epsilon \ll 1.$$

Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I,\varphi) \overset{\Psi_\epsilon}{\to} (\tilde I, \tilde\varphi)$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde\varphi$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.