Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
14 Febbraio 2025

Esercizio 1
Si consideri il funzionale

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^2 \left((t-1)^2\dot{\gamma}^2 + (t-1)\dot{\gamma}^3\right) dt$$

definito sulle funzioni $C^1([0,2];\mathbb{R})$.

i) Dimostrare che $\gamma_0 \equiv 0$ è un estremale di $\mathcal{A}_L$.

ii) Calcolare la variazione seconda $\delta^2\mathcal{A}_L(\gamma,\eta)$ in γ_0 e mostrare che si ha

$$\delta^2\mathcal{A}_L(0,\eta) > 0, \qquad \forall \eta \in C^1([0,2];\mathbb{R}) \setminus \{0\}.$$

iii) Mostrare che γ_0 non è un minimo debole di $\mathcal{A}_L$.[1]

Esercizio 2
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{A}|^2, \qquad \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{q}|^{-3}(-y,x,0),$$

con $\boldsymbol{p} = (p_x,p_y,p_z) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{q} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dove $x^2+y^2 \neq 0$.

i) Completare le relazioni

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = z$$

ad una trasformazione canonica indipendente dal tempo

$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \xrightarrow{\Psi} (\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}),$$

con $\boldsymbol{P} = (p_\rho,p_\theta,p_z) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{Q} = (\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}$ e scrivere la hamiltoniana K coniugata ad H tramite la trasformazione Ψ.

ii) Mostrare che p_θ è un integrale primo del campo vettoriale della hamiltoniana K e che le equazioni del moto si possono scrivere come

$$\ddot{\rho} = -V_\rho, \qquad \ddot{z} = -V_z,$$

con

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{p_\theta}{\rho} - \frac{\rho}{r^3}\right)^2, \qquad r = \sqrt{\rho^2+z^2}.$$

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}),$$

[1] considerare una famiglia di funzioni continue e lineari a tratti che tende a γ_0 in norma $\|\cdot\|_1$.

dove

$$
\begin{aligned}
h(\mathbf{I}) &= I_1\omega_1 + I_2\omega_2, \\
f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) &= 2[I_1^2 \cos^2(\varphi_1 - 5\varphi_2) + \sin\varphi_1 \cos(5\varphi_2)],
\end{aligned}
$$

e

$$
\mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \omega_1, \omega_2 \neq 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.
$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$
(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})
$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = 5\omega_2$.