Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
11 Luglio 2025

Esercizio 1
Data la funzione di Lagrange

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = -\frac{1}{q} + \frac{1}{2q^2}, \qquad\qquad q > 0,$$

si consideri la soluzione $\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per $L(q,\dot{q})$ con condizioni iniziali

$$q(0) = \frac{3}{2}, \qquad \dot{q}(0) = 0.$$

Trovare un valore $\bar{t} > 0$ del tempo tale che nell'intervallo $(0,\bar{t})$ non ci siano valori coniugati a $t = 0$.

Esercizio 2
Si considerino le funzioni di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left[|\mathbf{p}|^2|\mathbf{q}|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2\right] + V(|\mathbf{q}|), \qquad K(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2\right),$$

dove $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ e $V : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2.

i) Calcolare la parentesi di Lie

$$[X_H, X_K]$$

dei campi vettoriali hamiltoniani associati ad H e K.

ii) Assumendo che

$$V(x) = \frac{1}{2}\log(n + x^2)$$

e che $\mathbf{q} \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$, mostrare che il sistema hamiltoniano definito da

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = [X_H, X_K]$$

è integrabile con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I_1,I_2,I_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) = \frac{1}{2}(4I_1^2 - 9I_2^2 + 5I_3^2) + \varepsilon\cos(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + k_3\varphi_3),$$

con $k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $(I_1,I_2,I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \in \mathbb{T}^3$ e $0 < \varepsilon \ll 1$.

i) Trovare due integrali primi del sistema hamiltoniano tra loro indipendenti come combinazioni lineari di I_1, I_2, I_3.

ii) Determinare dei valori dei coefficienti k_1, k_2, k_3 per cui esistono dei moti del sistema che non soddisfano il principio della media. Per una scelta particolare di tali valori trovare esplicitamente questi particolari moti.

iii) Assumendo $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 1$, determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I_1,I_2,I_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}_1,\tilde{I}_2,\tilde{I}_3,\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\tilde{\varphi}_3)$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ.