Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
10 Giugno 2025

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad V(q) = q\sin q$$

con $q, \dot{q} \in \mathbb{R}$.

i) Tracciare il ritratto di fase delle equazioni di Eulero-Lagrange per L per $q \in [-2\pi, 2\pi]$.

ii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali
$$\bar{\gamma}(0) = 0, \qquad \dot{\bar{\gamma}}(0) = \sqrt{\pi}$$
è una funzione periodica tale che
$$-\frac{\pi}{2} \le \bar{\gamma}(t) \le \frac{\pi}{2}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

iii) Trovare un valore $\bar{t} > 0$ del tempo tale che nell'intervallo $(0,\bar{t})$ non ci siano valori coniugati a $t = 0$.

Esercizio 2
Si consideri la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t) \xrightarrow{\Psi} (\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},t)$$

con

$$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{P} = A^{-T}(t)\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{Q} = A(t)\boldsymbol{q}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} t+1 & 1 \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Dimostrare che Ψ è canonica.

(ii) Estendere Ψ ad una trasformazione canonica
$$(\boldsymbol{p},e,\boldsymbol{q},t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (\boldsymbol{P},\mathcal{E},\boldsymbol{Q},t)$$
definita sullo spazio delle fasi esteso, in cui $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ sono definite da Ψ ed $e,\mathcal{E} \in \mathbb{R}$ sono nuove variabili, coniugate al tempo.

(iii) Scrivere il campo vettoriale
$$X = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{q} \\ 0 \\ \boldsymbol{p} \\ 1 \end{pmatrix}$$
nelle nuove variabili $(\boldsymbol{P},\mathcal{E},\boldsymbol{Q},t)$ definite da $\tilde{\Psi}$.

Esercizio 3
Si consideri la hamiltoniana

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2^2 + \varepsilon f(\varphi_1, \varphi_2),$$

con $\omega_1, \omega_2 > 0$ e

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)[\cos(\varphi_1 + 2\varphi_2) - 1]$$

definita per $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$.

i) Trovare la forma normale risonante di H_ε relativa alla risonanza singola definita da $k = (1, -4)$. Scrivere anche l'espressione della funzione generatrice χ che definisce la trasformazione canonica Φ^ε_χ usata per passare a tale forma normale.

ii) Descrivere l'andamento delle variabili di azione I_1, I_2 al primo ordine in ε all'interno della risonanza considerata e mostrare che in questo caso vale il principio della media.