

Secondo compitino di Meccanica Razionale

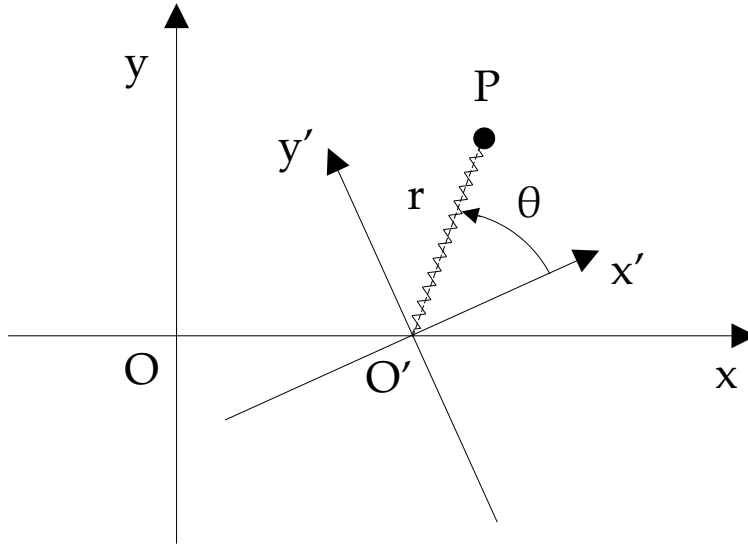
31 Maggio 2024

Esercizio 1. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxy$ e si consideri un punto O' che si muove lungo Ox con un'accelerazione costante $a\hat{e}_1$ ($a > 0$). Si consideri inoltre il sistema di riferimento $\Sigma' = O'x'y'$ con velocità angolare costante $\omega = \omega\hat{e}_3$ ($\omega > 0$) rispetto a Σ , dove \hat{e}_3 è il versore perpendicolare al piano. Prendiamo un punto materiale P di massa m libero di muoversi nel piano e collegato ad O' da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si usino come coordinate lagrangiane le coordinate polari (r, θ) misurate in Σ' (si veda la figura) e si supponga che al tempo iniziale $t_0 = 0$ il punto O' coincida con O e abbia velocità nulla, e che sempre a t_0 gli assi Ox e $O'x'$ coincidano.

- i) Scrivere la lagrangiana L nel sistema di riferimento Σ .
- ii) Scrivere la lagrangiana L' nel sistema di riferimento Σ' .
- iii) Mostrare che le due lagrangiane sono equivalenti trovando una funzione $F(r, \theta, t)$ tale che

$$L' = L + \frac{dF}{dt}.$$



Esercizio 2. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ nello spazio. Un punto materiale P di massa μ è vincolato a muoversi lungo una guida circolare di raggio $2R$, descritta da

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4R^2, z = 0\}.$$

Due molle di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collegano P agli estremi di un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ . L'asta è vincolata a rimanere sul piano verticale Oyz ; l'estremo A è vincolato a scorrere lungo l'asse Oz , mentre l'altro estremo è incernierato al baricentro B di un disco omogeneo di massa M e raggio R , che rotola senza strisciare sull'asse Oy , rimanendo sempre nel piano Oyz (si veda la figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso (parallela all'asse Oz).

Si assuma che tutti i vincoli siano ideali. Si usino come coordinare lagrangiane l'angolo α che la direzione OP forma con l'asse Ox e l'angolo φ che l'asta forma con l'asse Oz .

- i) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- ii) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio, assumendo che $\frac{mg}{kR} = 2$.

