

# Compito di Meccanica Razionale

## 19 Febbraio 2025

**Esercizio 1.** Si consideri un punto materiale  $P$  di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{2\alpha}{\rho^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

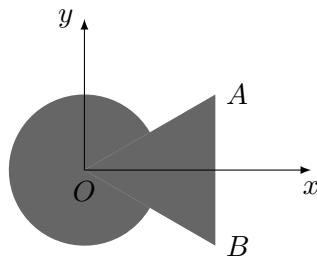
Si supponga che il momento angolare  $\vec{M}_O$  rispetto al centro di forze  $O$  sia diverso da zero e si denoti con  $c$  la componente di  $\vec{M}_O$  ortogonale al piano del moto.

- i) Trovare tutte le orbite circolari al variare di  $\alpha$  e  $c$ .
- ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate  $(\rho, \dot{\rho})$  al variare di  $\alpha$  e  $c$ .
- iii) Sia  $\alpha = -3$  e nel piano del moto  $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$  si scelgano le condizioni iniziali

$$(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0), \quad (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)) = (a, -\sqrt{5}), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Trovare i valori di  $a$  per cui l'orbita con le condizioni iniziali (1) è limitata.

**Esercizio 2.** In un piano orizzontale si fissi un riferimento  $Oxy$  e si consideri il corpo rigido omogeneo  $\mathcal{C}$  di massa  $m$  descritto in figura, costruito con un disco di raggio  $r$  da cui è stato ritagliato un settore circolare di ampiezza angolare  $\pi/3$  per poi inserirvi il triangolo equilatero  $OAB$  di lato  $2r$ .



Calcolare i momenti principali di inerzia di  $\mathcal{C}$  rispetto all'origine  $O$ .

**Esercizio 3.** In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è vincolato a muoversi su una parabola di equazione  $y = x^2$ , mentre un altro punto materiale  $Q$  di massa  $M \neq m$  è vincolato a muoversi su una parabola di equazione  $x = y^2$ . I due punti sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa  $s$  del punto  $P$  e l'ordinata  $t$  del punto  $Q$ .

- i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- ii) Determinare le configurazioni di equilibrio.
- iii) Studiare la stabilità degli equilibri.
- iv) Calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno ad uno degli equilibri stabili.