

Compito di Meccanica Razionale

19 Febbraio 2025

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{2\alpha}{\rho^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

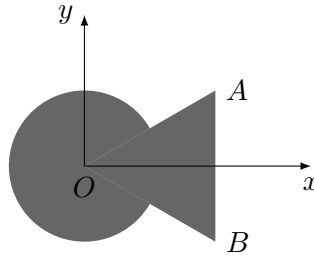
Si supponga che il momento angolare \vec{M}_O rispetto al centro di forze O sia diverso da zero e si denoti con c la componente di \vec{M}_O ortogonale al piano del moto.

- i) Trovare tutte le orbite circolari al variare di α e c .
- ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di α e c .
- iii) Sia $\alpha = -3$ e nel piano del moto $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$ si scelgano le condizioni iniziali

$$(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0), \quad (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)) = (a, -\sqrt{5}), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Trovare i valori di a per cui l'orbita con le condizioni iniziali (1) è limitata.

Esercizio 2. In un piano orizzontale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il corpo rigido omogeneo \mathcal{C} di massa m descritto in figura, costruito con un disco di raggio r da cui è stato ritagliato un settore circolare di ampiezza angolare $\pi/3$ per poi inserirvi il triangolo equilatero OAB di lato $2r$.



Calcolare i momenti principali di inerzia di \mathcal{C} rispetto all'origine O .

Esercizio 3. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una parabola di equazione $y = x^2$, mentre un altro punto materiale Q di massa $M \neq m$ è vincolato a muoversi su una parabola di equazione $x = y^2$. I due punti sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto P e l'ordinata t del punto Q .

- i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- ii) Determinare le configurazioni di equilibrio.
- iii) Studiare la stabilità degli equilibri.
- iv) Calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno ad uno degli equilibri stabili.