

# Compito di Meccanica Razionale

## 18 Settembre 2024

**Esercizio 1.** Si consideri un punto materiale  $P$  di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = -\frac{e^{1/\rho}}{\rho^2} + \frac{\alpha}{\rho^3}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

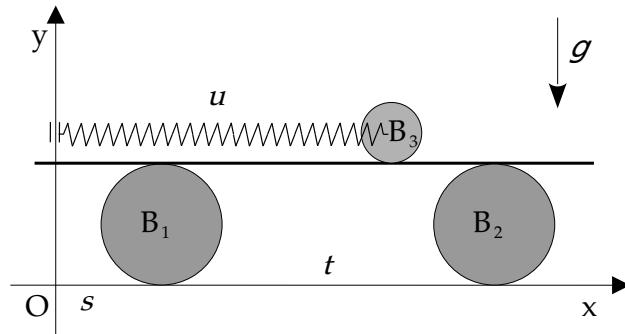
Si supponga che la componente  $c$  del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

- i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di  $c$  e  $\alpha$ .
- ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate  $(\rho, \dot{\rho})$  al variare di  $c$  e  $\alpha$ .
- iii) Sia  $\alpha = -3$ , sul piano del moto  $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$  si prendano

$$\mathbf{x}(0) = (1, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (a, -1), \quad a \in \mathbb{R};$$

trovare tutti i valori di  $a$  affinché l'orbita con condizioni iniziali  $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$  sia limitata.

**Esercizio 2.** In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$  con asse  $Oy$  verticale ascendente. In tale piano si consideri il moto di un sistema meccanico composto da tre dischi omogenei:  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  hanno massa  $M$  e raggio  $R$ , mentre  $\mathcal{D}_3$  ha massa  $m$  e raggio  $r$ . I dischi  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  rotolano senza strisciare sull'asse  $Ox$  e su un'asta di massa trascurabile e lunghezza  $\ell$  che appoggia su di essi. Infine, il disco  $\mathcal{D}_3$  rotola senza strisciare sull'asta, dalla parte opposta degli altri due dischi (si veda la figura).

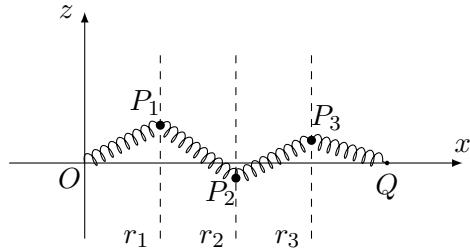


Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$  e rivolta verso il basso. Inoltre, una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro

del disco  $\mathcal{D}_3$  all'asse  $Oy$ , rimanendo sempre orizzontale. Sia  $s$  l'ascissa del baricentro  $B_1$  del disco  $\mathcal{D}_1$ ,  $s+t$  l'ascissa del baricentro  $B_2$  del disco  $\mathcal{D}_2$  e  $u$  l'ascissa del baricentro  $B_3$  del disco  $\mathcal{D}_3$ .

- Dimostrare che in questa configurazione  $t$  necessariamente costante.
- Calcolare la velocità angolare dei tre dischi.
- Calcolare la componente orizzontale delle reazioni vincolari agenti sui dischi  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  nei loro punti di contatto con l'asse  $Ox$ .
- Scrivere le equazioni del moto del sistema mediante le equazioni cardinali.

**Esercizio 3.** In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxz$ , con asse  $Oz$  verticale ascendente, e si consideri il sistema meccanico formato da tre punti materiali  $P_1, P_2, P_3$  di massa  $m$  vincolati a scorrere senza attrito su tre rette verticali  $r_1, r_2, r_3$  passanti per i punti di coordinate  $(x, z) = (\ell, 0), (2\ell, 0), (3\ell, 0)$ , con  $\ell > 0$ . Sui tre punti agiscono delle forze elastiche esercitate da quattro molle uguali, di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Queste molle sono disposte come in figura: due di esse collegano  $P_i$  a  $P_{i+1}$  con  $i = 1, 2$ , le altre due collegano  $P_1$  al punto  $O$  e  $P_3$  al punto  $Q$  di coordinate  $(x, z) = (4\ell, 0)$ . Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione  $g$ .



Per descrivere le configurazioni del sistema si usino le ordinate  $z_1, z_2, z_3$  dei punti  $P_1, P_2, P_3$  lungo le rette  $r_1, r_2, r_3$ .

- Mostrare che il sistema meccanico ha un'unica configurazione di equilibrio  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ , che è stabile.
- Calcolare le frequenze proprie ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno a questa configurazione.