

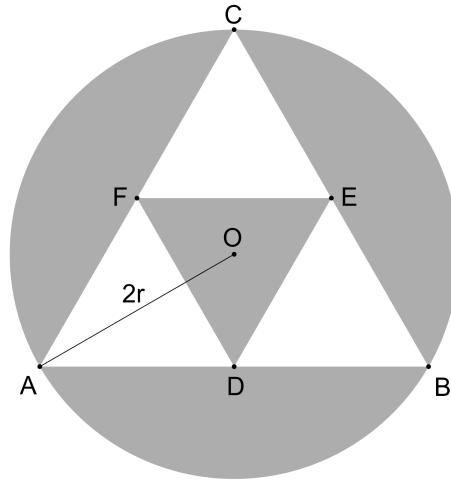
## Compito di Meccanica Razionale

### 15 Luglio 2024

**Esercizio 1.** Si consideri una lamina piana omogenea  $\mathcal{L}$  di massa  $m$ , ottenuta rimuovendo da un disco di raggio  $2r$  un triangolo equilatero  $ABC$  inscritto in esso, con l'eccezione del triangolo equilatero  $DEF$ , i cui vertici coincidono con i punti medi dei lati di  $ABC$  (si veda la figura).

Sia  $O$  il baricentro di  $\mathcal{L}$ , il quale coincide con quello di  $ABC$  e di  $DEF$ .

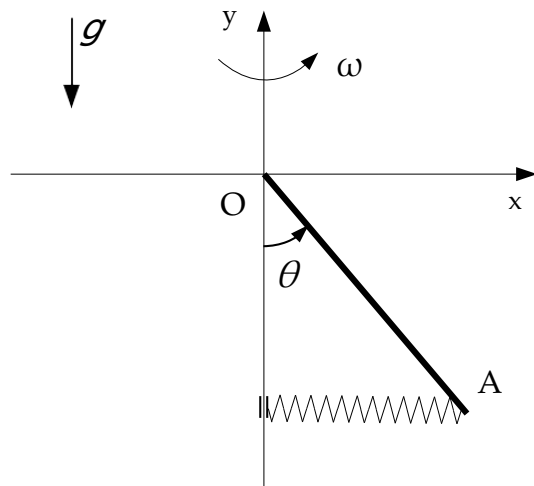
- i) Dimostrare che ogni retta passante per  $O$  e giacente nel piano della figura è un asse principale di inerzia per  $\mathcal{L}$ .
- ii) Calcolare i momenti principali di inerzia di  $\mathcal{L}$  rispetto ad  $O$ .



**Esercizio 2.** In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ . Un estremo dell'asta è incernierato nell'origine  $O$  e l'altro estremo  $A$  è collegato all'asse  $Oy$  da una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla che si mantiene sempre parallela all'asse  $Ox$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione  $g > 0$  e rivolta verso il basso. Il piano del sistema meccanico viene fatto ruotare attorno all'asse  $Oy$  con velocità angolare costante  $\omega > 0$ . Tutti i vincoli sono ideali.

Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo  $\vartheta$  che l'asta forma con la direzione verticale.

- i) Trovare il valore di  $\omega$  per cui l'asta è in equilibrio nel sistema rotante per  $\vartheta = \pi/4$ .
- ii) Per la configurazione di equilibrio del punto precedente calcolare la reazione vincolare  $\vec{\Phi}$  sviluppata sull'estremo dell'asta incernierato in  $O$ .



**Esercizio 3.** In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r > 0$ , mentre un punto materiale  $Q$ , anch'esso di massa  $m$ , è vincolato a muoversi su una parabola di equazione  $y = x^2$ . I due punti sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla.

Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo  $\vartheta$  che il segmento  $OP$  forma con l'asse  $Ox$  e l'ascissa  $s$  del punto  $Q$ .

- i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- ii) Posto  $r = \sqrt{2}$ , determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- iii) Sempre per  $r = \sqrt{2}$ , studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio.