

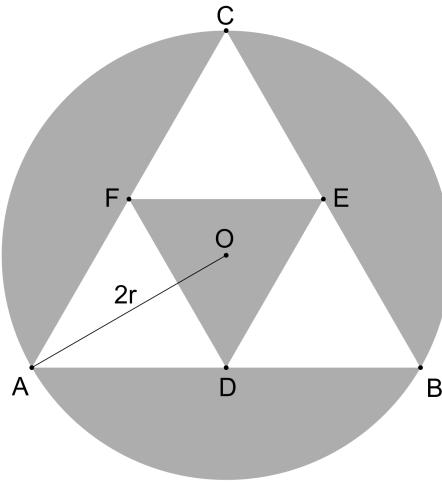
Compito di Meccanica Razionale

15 Luglio 2024

Esercizio 1. Si consideri una lamina piana omogenea \mathcal{L} di massa m , ottenuta rimuovendo da un disco di raggio $2r$ un triangolo equilatero ABC inscritto in esso, con l'eccezione del triangolo equilatero DEF , i cui vertici coincidono con i punti medi dei lati di ABC (si veda la figura).

Sia O il baricentro di \mathcal{L} , il quale coincide con quello di ABC e di DEF .

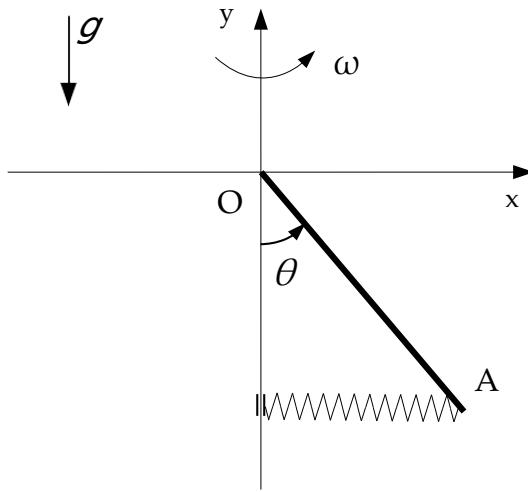
- Dimostrare che ogni retta passante per O e giacente nel piano della figura è un asse principale di inerzia per \mathcal{L} .
- Calcolare i momenti principali di inerzia di \mathcal{L} rispetto ad O .



Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ . Un estremo dell'asta è incernierato nell'origine O e l'altro estremo A è collegato all'asse Oy da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che si mantiene sempre parallela all'asse Ox . Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso. Il piano del sistema meccanico viene fatto ruotare attorno all'asse Oy con velocità angolare costante $\omega > 0$. Tutti i vincoli sono ideali.

Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ che l'asta forma con la direzione verticale.

- Trovare il valore di ω per cui l'asta è in equilibrio nel sistema rotante per $\vartheta = \pi/4$.
- Per la configurazione di equilibrio del punto precedente calcolare la reazione vincolare $\vec{\Phi}$ sviluppata sull'estremo dell'asta incernierato in O .



Esercizio 3. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro O e raggio $r > 0$, mentre un punto materiale Q , anch'esso di massa m , è vincolato a muoversi su una parabola di equazione $y = x^2$. I due punti sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo ϑ che il segmento OP forma con l'asse Ox e l'ascissa s del punto Q .

- i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- ii) Posto $r = \sqrt{2}$, determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- iii) Sempre per $r = \sqrt{2}$, studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio.