

Compito di Meccanica Razionale

7 Aprile 2025

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho^3}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

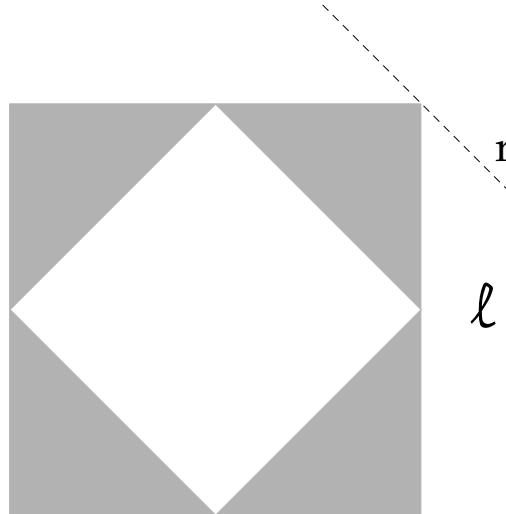
Si supponga che il momento angolare \vec{M}_O rispetto al centro di forze O sia diverso da zero e si denoti con c la componente di \vec{M}_O ortogonale al piano del moto.

- i) Trovare tutte le orbite circolari al variare di c e α .
- ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di c e α .
- iii) Sia $\alpha = -3$ e si prendano

$$\mathbf{x}(0) = (1, 1, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (a, b, 0), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

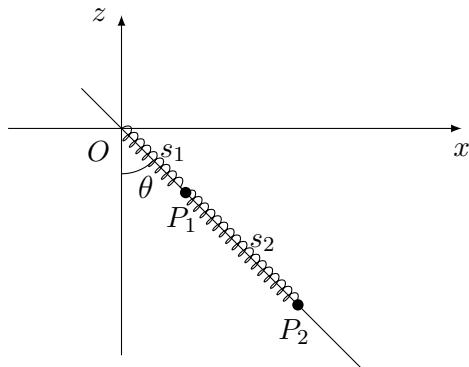
Trovare tutti i valori di a e b affinché l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. Si consideri una lamina quadrata \mathcal{H} di lato ℓ , massa m e densità omogenea. A \mathcal{H} viene applicato un foro uguale ad un quadrato con vertici coincidenti ai punti medi dei lati di \mathcal{H} (vedi figura), ottenendo così una lamina forata \mathcal{H}_0 .



- Dimostrare che qualsiasi retta passante per il baricentro di \mathcal{H}_0 e giacente nel piano della figura è un asse principale di inerzia per \mathcal{H}_0 .
- Determinare i momenti principali di inerzia di \mathcal{H}_0 rispetto al suo baricentro.
- Calcolare il momento di inerzia di \mathcal{H}_0 rispetto ad un asse r passante per uno dei vertici di \mathcal{H} e inclinato di $\pi/4$ rispetto ai lati (si veda la figura).

Esercizio 3. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura, mobile nel piano Oxz , composto da 2 punti materiali P_1, P_2 di ugual massa m .



I punti P_1, P_2 possono scorrere su una guida rettilinea incernierata nell'origine O . Inoltre delle molle di ugual costante elastica k collegano O a P_1 , e P_1 a P_2 . Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g . Supponiamo che la guida sia liscia e che i punti materiali possano attraversarsi a vicenda. Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che la guida forma con la direzione verticale, l'ascissa s_1 di P_1 sulla guida e l'ascissa relativa s_2 di P_2 calcolata rispetto a P_1 sulla guida.

- Scrivere la lagrangiana del sistema.
- Calcolare tutte le configurazioni di equilibrio.
- Determinare la stabilità degli equilibri.