Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

11 Gennaio 2023

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1

Si descrivano le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale sulla superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = r(z)\cos\varphi \\ y = r(z)\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad\qquad r(z) = 2 + \frac{\cos z}{1+z^2},$$

dove $z \in \mathbb{R}, \varphi \in S^1$, disegnando anche il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate $z, \dot{z}$ nel caso in cui la componente del momento angolare $\boldsymbol{M}_O$ lungo l'asse z sia non nulla.

Esercizio 2

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2, t) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{t^2} + \frac{t^2(q_1^2 + q_2^2)}{2} - \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2}{t} - p_2 q_1 - p_1 q_2,$$

con $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

i) Data la trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(p_1, p_2, q_1, q_2, t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, t)$$

con

$$\tilde{p}_1 = \frac{p_1}{t}, \qquad \tilde{p}_2 = \frac{p_2}{t}, \qquad \tilde{q}_1 = t q_1, \qquad \tilde{q}_2 = t q_2,$$

scrivere il campo vettoriale $X_{\tilde{H}} = \Psi_* X_H$ associato alla nuova hamiltoniana $\tilde{H}$.

ii) Mostrare che la funzione

$$F(\tilde{q}_1, \tilde{p}_2, Q_2, P_1) = Q_2(\tilde{q}_1 - \tilde{p}_2) + \tilde{p}_2 P_1$$

genera una trasformazione canonica univalente

$$(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$

sul dominio della funzione $\tilde{H}$ tale che le nuove coordinate Q_1, Q_2 siano separabili per la funzione di Hamilton $K = \tilde{H} \circ \Psi^{-1}$.

iii) Trovare la soluzione per $t \geq 1$ delle equazioni di Hamilton associate ad H con condizioni iniziali $p_1(1) = p_2(1) = q_1(1) = q_2(1) = 1$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \varphi) = h(I) + \epsilon f(I, \varphi),$$

con

$$
\begin{aligned}
h(I) &= \frac{1}{2}(aI_1^2 + bI_2^2 + cI_3^2), \\
f(I, \varphi) &= \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) + \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2),
\end{aligned}
$$

dove

$$
I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \epsilon \ll 1.
$$

i) Determinare dei valori dei coefficienti a, b, c per cui esistono dei moti del sistema che non soddisfano il principio della media. In particolare, discutere l'evoluzione temporale delle azioni.

ii) Assumendo $a = b = c = 1$, usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$
(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \xrightarrow{\mathcal{C}_\epsilon^{-1}} (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3)
$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\epsilon = H_\epsilon \circ \mathcal{C}_\epsilon$ non dipenda da $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione fino al primo ordine in ϵ.