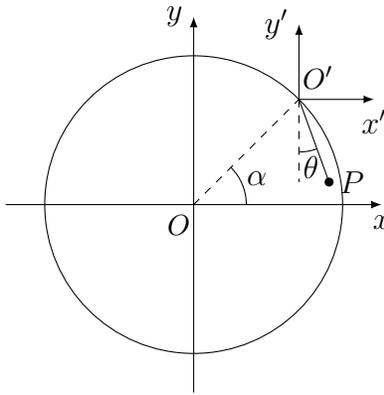


Secondo compito di Meccanica Razionale 31 Maggio 2022

Esercizio 1. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxy$ e si consideri un pendolo formato da un punto materiale P di massa m saldato ad un estremo di un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. L'altro estremo O' dell'asta è vincolato a muoversi su una guida circolare di raggio R centrata nell'origine, con legge oraria data da $t \mapsto \alpha(t)$, dove α è l'angolo tra OO' e l'asse Ox . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g .

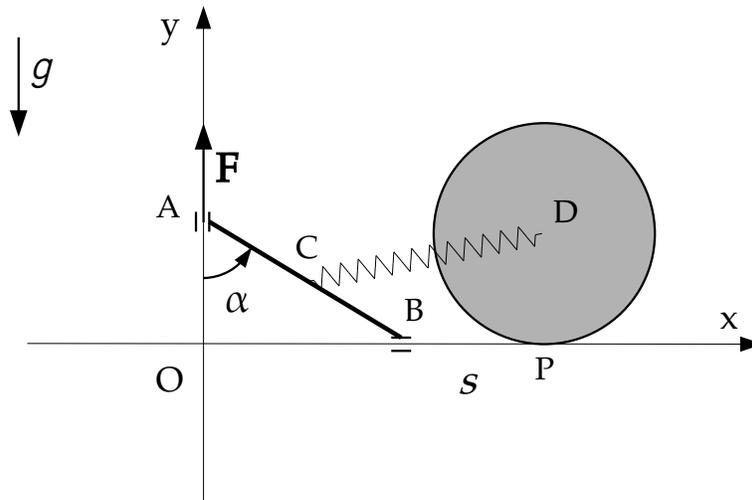


Si consideri inoltre il riferimento Σ' con origine in O' e orientato come Σ . Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il pendolo forma con la direzione verticale,

- i) Scrivere le lagrangiane L e L' del sistema meccanico nei due riferimenti Σ e Σ' ;
- ii) trovare una funzione $F(\theta, t)$ tale che

$$L' = L + \frac{dF}{dt}.$$

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da un'asta di lunghezza $2r$ e massa m , e da un disco di raggio r e massa M . L'estremo A dell'asta è vincolato a scorrere lungo l'asse Oy , mentre l'estremo B è vincolato a scorrere lungo l'asse x . Il disco rotola senza strisciare sull'asse Ox . Il sistema è soggetto alla forza di gravità di accelerazione g , diretta verso il basso, e i baricentri dei due corpi sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Inoltre, sull'estremo A dell'asta agisce una forza costante $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{e}}_2$, con $F > 0$ e $\hat{\mathbf{e}}_2$ è il versore dell'asse Oy .



Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto di contatto P del disco con l'asse Ox e l'angolo α che l'asta forma con la direzione verticale,

- determinare le configurazioni di equilibrio del sistema;
- studiare la stabilità delle configurazioni trovate al variare del parametro

$$J = \frac{mg - 2F}{kr};$$

- nel caso $J = 3$, calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno agli equilibri stabili del sistema.