

Compito di Meccanica Razionale 18 Giugno 2022

Esercizio 1. Un corpo di massa unitaria è soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|,$$

$$f(\rho) = \alpha \rho^2 + \frac{\beta}{\rho^2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di α e β .
- ii) Tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare dei parametri α, β e della componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto, supponendo $c \neq 0$.
- iii) Siano $\alpha = -2, \beta = 1$ e si prendano

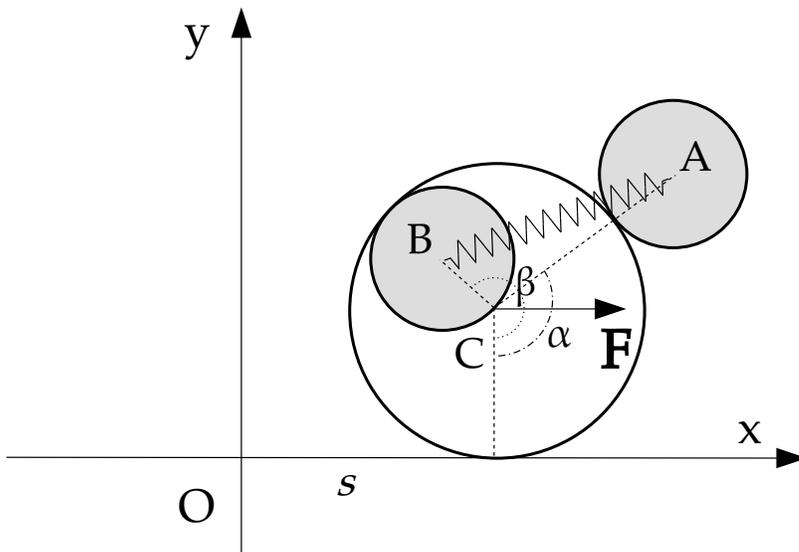
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_\rho, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = a\mathbf{e}_\rho + b\mathbf{e}_\theta, \quad a, b \in \mathbb{R};$$

trovare a e b affinché l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Un anello \mathcal{A} omogeneo di massa M e raggio $2r$ rotola senza strisciare sull'asse Ox . Inoltre, due dischi \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 omogenei di massa m e raggio r rotolano senza strisciare sul bordo dell'anello, stando uno all'esterno e uno all'interno dell'anello. I baricentri dei due dischi sono collegati tra loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Infine, una forza costante $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_1$ è applicata nel centro di massa dell'anello.

Chiamiamo C il centro di massa di \mathcal{A} , A il centro di massa di \mathcal{D}_1 e B il centro di massa di \mathcal{D}_2 . Si usino come coordinate l'ascissa s di C , l'angolo α che CA forma con la direzione verticale e l'angolo β che CB forma con la direzione verticale (si veda la figura).

- i) Calcolare le velocità angolari di $\mathcal{A}, \mathcal{D}_1$ e \mathcal{D}_2 .
- ii) Calcolare le equazioni di moto del sistema mediante le equazioni cardinali.



Esercizio 3. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ e si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1, P_2 di massa m collegati da una molla di costante elastica k . Il punto P_1 può scivolare sulla retta

$$r = \{(x, y, z) : x = a, z = 0\}$$

con $a > 0$ e il punto P_2 può scivolare sulla circonferenza

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = r^2, z = h\}$$

con $r, h > 0$. Usando come coordinate lagrangiane la coordinata y del punto P_1 e l'angolo θ che il punto P_2 descrive sulla circonferenza, assumendo $\theta = 0$ quando P_2 si trova nel punto di coordinate $(x, y, z) = (r, 0, h)$,

1. calcolare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità al variare del parametro a/r ;
2. per $a = 2r$ trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all'unica configurazione di equilibrio stabile.