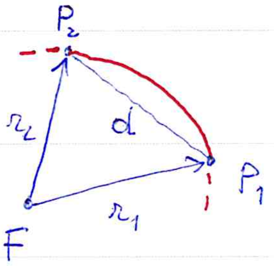
Lambert (1761) Nel moto ellittico determinato dalla legge di attrazione gravitazionale di Newton, il tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ trascorso per descrivere un arco qualunque (senza rivoluzioni multiple) dalla posizione iniziale P_1 alla posizione finale P_2 dipende solo dal semiasse maggiore a, dalla somma $r = r_1 + r_2$ delle due distanze $r_1 = |P_1 - F|$, $r_2 = |P_2 - F|$ dal centro di forza F, e dalla lunghezza d della corda che collega P_1 e P_2.



Più precisamente si ha

$$\boxed{n\,\Delta t = \beta - \gamma - (\sin\beta - \sin\gamma)}$$

dove $n = n(a)$ è il moto medio, e gli angoli β, γ sono definiti dalle relazioni

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{r+d}{4a} \qquad \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{r-d}{4a}$$

e $\quad 0 \leq \beta - \gamma \leq 2\pi$.

DIM. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che le posizioni dei punti P_1, P_2 siano definite da due valori E_1, E_2 della anomalia eccentrica tali che $\quad 0 \leq E_2 - E_1 \leq 2\pi$.

La differenza tra le equazioni di Keplero ai due tempi dà

$$n\,\Delta t = E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1)$$

dove e è l'eccentricità orbitale.

TEOR. di LAMBERT

Da relazioni geometriche elementari otteniamo

$$\frac{r}{a} = 2\left(1 - e\cos\frac{E_1+E_2}{2}\cos\frac{E_2-E_1}{2}\right), \qquad \boxed{(1)}$$

$$\frac{d}{a} = 2\sin\frac{E_2-E_1}{2}\sqrt{1 - e^2\cos^2\frac{E_1+E_2}{2}}. \qquad \boxed{(2)}$$

$\boxed{(1)}$ Dalle relazioni $r_1 = a(1-e\cos E_1)$, $r_2 = a(1-e\cos E_2)$

si ottiene $\dfrac{r}{a} = \dfrac{r_1+r_2}{a} = 2 - e(\cos E_1+\cos E_2)$

Inoltre $\cos E_1 + \cos E_2 = \cos\left(\frac{E_1+E_2}{2}+\frac{E_1-E_2}{2}\right) + \cos\left(\frac{E_1+E_2}{2}-\frac{E_1-E_2}{2}\right)$

$$= 2\cos\left(\frac{E_1+E_2}{2}\right)\cos\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)$$

$\boxed{(2)}$ Dalle relazioni

$$\begin{cases} d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(f_2-f_1) \\ r_1\cos f_1 = a(\cos E_1 - e) \\ r_1\sin f_1 = a\sqrt{1-e^2}\sin E_1 \end{cases}$$

anomalie vere

analoghe formule per E_2, f_2, r_2

Si ottiene

$$(\mathrm{I}) := \frac{d^2}{a^2} = (1-e\cos E_1)^2 + (1-e\cos E_2)^2 - 2r_1r_2(\cos f_2\cos f_1 + \sin f_2\sin f_1)$$

$$= 2 - 2e(\cos E_1+\cos E_2) + e^2(\cos^2E_1+\cos^2E_2)$$

$$- 2\left[(\cos E_2 - e)(\cos E_1 - e) + (1-e^2)\sin E_2\sin E_1\right]$$

$$= 2 - 2\cancel{e(\cos E_1+\cos E_2)} + e^2(\cos^2E_1+\cos^2E_2)$$

$$- 2\left[\cos E_2\cos E_1 - \cancel{e(\cos E_2+\cos E_1)} + e^2 + (1-e^2)\sin E_2\sin E_1\right]$$

$$= 2 + e^2(\cos^2E_1+\cos^2E_2) - 2\cos E_1\cos E_2 - 2e^2 - 2(1-e^2)\sin E_1\sin E_2$$

TEOR. di LAMBERT

Si osserva anche che

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$(\mathrm{II}) := 4\sin^2\left(\frac{E_1-E_2}{2}\right)\left[1-e^2\cos^2\left(\frac{E_1+E_2}{2}\right)\right]$$

$$= 4\left[\frac{1-\cos(E_1-E_2)}{2}\right]\left\{1-e^2\left[\frac{1+\cos(E_1+E_2)}{2}\right]\right\}$$

$$= \left[1-\cos(E_1-E_2)\right]\left[2-e^2-e^2\cos(E_1+E_2)\right]$$

$$= \left[1-(\cos E_1\cos E_2+\sin E_1\sin E_2)\right]\left[2-e^2-e^2(\cos E_1\cos E_2-\sin E_1\sin E_2)\right]$$

$$= 2-e^2-e^2(\cancel{\cos E_1\cos E_2}-\sin E_1\sin E_2)-2(\cos E_1\cos E_2+\sin E_1\sin E_2)$$

$$+e^2(\cancel{\cos E_1\cos E_2}+\sin E_1\sin E_2)+e^2(\cos^2 E_1\cos^2 E_2-\sin^2 E_1\sin^2 E_2)$$

Considero adesso $(\mathrm{I})-(\mathrm{II})$:

$$\cancel{2}-\cancel{2}e^2-\cancel{2\cos E_1\cos E_2}-\cancel{2\sin E_1\sin E_2}+\cancel{2e^2\sin E_1\sin E_2}+e^2(\cos^2 E_1+\cos^2 E_2)$$

$$-\cancel{2}+\cancel{e^2}-\cancel{e^2\sin E_1\sin E_2}+\cancel{2\cos E_1\cos E_2}+\cancel{2\sin E_1\sin E_2}$$

$$-\cancel{e^2\sin E_1\sin E_2}-e^2(\cos^2 E_1\cos^2 E_2-\sin^2 E_1\sin^2 E_2)$$

$$= -e^2+e^2(\cos^2 E_1+\cos^2 E_2)-e^2(\cos^2 E_1\cos^2 E_2-\sin^2 E_1\sin^2 E_2)$$

$$= e^2\left[\cos^2 E_1-\sin^2 E_2-\cos^2 E_1\cos^2 E_2+(1-\cos^2 E_1)\sin^2 E_2\right]$$

$$= e^2\left[\cancel{\cos^2 E_1}-\cancel{\sin^2 E_2}-\cancel{\cos^2 E_1}(\underbrace{\cancel{\cos^2 E_2+\sin^2 E_2}}_{1})+\cancel{\sin^2 E_2}\right] = 0$$

TEOR. di LAMBERT

Ne segue che

$$(\mathrm{III})\qquad \frac{r+d}{2a} = 1 - \cos\left(\frac{E_2-E_1}{2} + \arccos\left(e\cos\frac{E_2+E_1}{2}\right)\right),$$

$$(\mathrm{IV})\qquad \frac{r-d}{2a} = 1 - \cos\left(-\frac{E_2-E_1}{2} + \arccos\left(e\cos\frac{E_2+E_1}{2}\right)\right)$$

DIM. (III) Sviluppando l'espressione a destra si ottiene

$$1 - \cos\left(\frac{E_2-E_1}{2}\right) e\cos\left(\frac{E_2+E_1}{2}\right) + \sin\left(\frac{E_2-E_1}{2}\right)\sin\left(\arccos\left(e\cos\frac{E_2+E_1}{2}\right)\right)$$

$$= 1 - e\cos\frac{E_2-E_1}{2}\cos\frac{E_2+E_1}{2} + \sin\frac{E_2-E_1}{2}\sqrt{1-e^2\cos^2\frac{E_2+E_1}{2}}$$

$$= \frac{r}{2a} + \frac{d}{2a}$$

La dim. di (IV) è analoga.

In particolare, perché ~~una~~ sia possibile avere un'orbita ellittica reale, le quantità scalari date devono soddisfare le relazioni

$$r \geq d, \qquad 4a - r \geq d.$$

Se definiamo

$$\beta_0 = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{r+d}{4a}}\right), \qquad \gamma_0 = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{r-d}{4a}}\right)$$

allora, usando la relazione $\quad 1-\cos\vartheta = 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} \quad \vartheta\in\mathbb{R}$

e ponendo

$$\beta = \frac{E_2-E_1}{2} + \arccos\left(e\cos\frac{E_2+E_1}{2}\right) \qquad (\mathrm{V})$$

$$\gamma = -\frac{E_2-E_1}{2} + \arccos\left(e\cos\frac{E_2+E_1}{2}\right) \qquad (\mathrm{VI})$$

troviamo che le coppie ~~soddisfano~~

$(\square)$ $(\beta,\gamma) = (\beta_0,\gamma_0),\ (\beta_0,-\gamma_0),\ (2\pi-\beta_0,-\gamma_0),\ (2\pi-\beta_0,\gamma_0)$

soddisfano (III) e (IV).

A meno di sommare lo stesso multiplo intero di 2π sia a β che a γ le coppie $(\square)$ sono le sole che soddisfano (III), (IV) e $0 \le \beta-\gamma \le 2\pi$

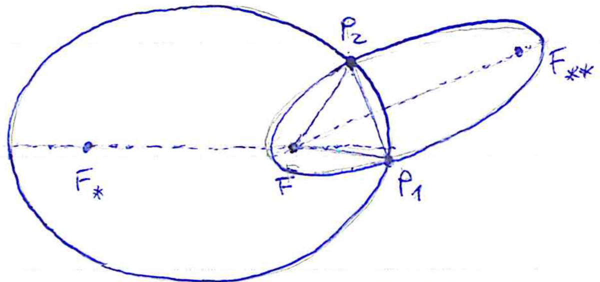
Da (V), (VI) otteniamo

$$\beta-\gamma = E_2 - E_1 \,, \qquad \cos\frac{\beta+\gamma}{2} = e\cos\frac{E_2+E_1}{2} \,;$$

che implica
$$n\,\Delta t = \beta-\gamma-(\sin\beta-\sin\gamma)$$

Infatti:
$$\sin\beta-\sin\gamma = 2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$= 2e\sin\frac{E_2-E_1}{2}\cos\frac{E_2+E_1}{2} = e(\sin E_2-\sin E_1)\,.$$

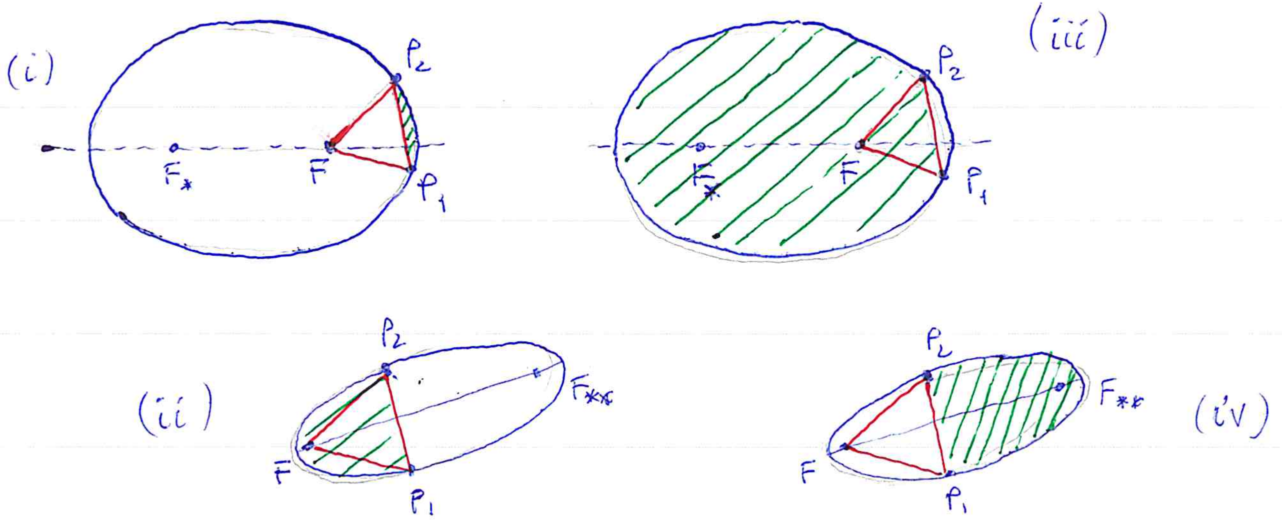
Le coppie (β,γ) in $(\square)$ corrispondono a 4 percorsi possibili geometricamente distinti, dalla posizione iniziale a quella finale.



Dati i punti P_1, P_2 ed il fuoco attrattivo F, per un valore fissato del semiasse maggiore a, troviamo 2 ellissi diverse passanti per P_1 e P_2. Queste condividono il fuoco attrattivo F, ma non il secondo fuoco (F_*, F_{**} in figura)

Per ogni ellisse abbiamo due possibili archi da P_1 a P_2, con orientazione diverse (oraria e antioraria).

Seguendo Plummer (1918), possiamo distinguere i 4 casi usando la regione $\mathcal{R}$ il cui bordo è formato dall'arco e dalla corda che congiungono P_1 e P_2.



Prendendo in considerazione la possibilità di rivoluzioni multiple lungo l'orbita, e denotando con n il moto medio, si ottengono le seguenti espressioni per Δt:

(i) $\quad \Delta t = T_1 + 2K\frac{\pi}{n}$ $\quad$ K rivoluzioni

$\mathcal{R}$ NON contiene nessuno dei 2 fuochi

(ii) $\quad \Delta t = T_2 + 2K\frac{\pi}{n}$ $\quad$ K rivoluzioni

$\mathcal{R}$ contiene SOLO il fuoco attrattivo

(iii) $\quad \Delta t = -T_1 + 2(K+1)\frac{\pi}{n}$ $\quad$ K rivoluzioni

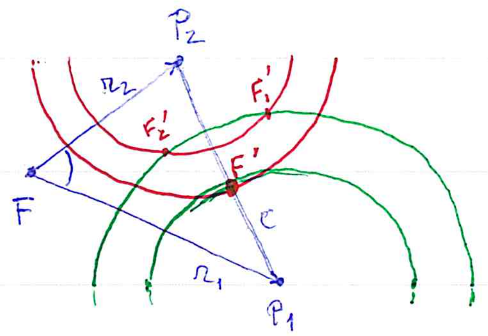
$\mathcal{R}$ contiene ENTRAMBI i fuochi

(iv) $\quad \Delta t = -T_2 + 2(K+1)\frac{\pi}{n}$ $\quad$ K rivoluzioni

$\mathcal{R}$ contiene SOLO il fuoco NON attrattivo

dove
$$\begin{cases} nT_1 = \beta_0 - \gamma_0 - (\sin\beta_0 - \sin\gamma_0) \\ nT_2 = \beta_0 + \gamma_0 - (\sin\beta_0 + \sin\gamma_0) \end{cases}$$

TEOR. di LAMBERT



r_1', r_2' = distanze dal secondo fuoco (F') dell'ellisse

Si ha $\begin{cases} r_1 + r_1' = 2a & r_1' = 2a - r_1 \\ r_2 + r_2' = 2a & r_2' = 2a - r_2 \end{cases}$

Costruiamo cerchi di raggi r_1', r_2' centrati in P_1, P_2 rispettivamente

Se $a < \frac{r_1+r_2+c}{4}$ non esiste F', quindi non è definita l'ellisse

Se $a > \frac{r_1+r_2+c}{4}$ i cerchi si intersecano in al più 2 punti (F_1', F_2') e sono definite 2 possibili ellissi

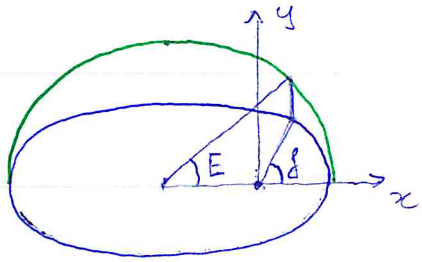
Se $a = \frac{r_1+r_2+c}{4}$ c'è un'unica intersezione ed è definita una sola ellisse.

Formule utilizzate: $\boxed{l = n(t-t_0) = E - e \sin E}$ eq. di Keplero

$n^2 a^3 = K^2$

K = cost. di Gauss

E = anomalia eccentrica



$$x = r\cos f = a(\cos E - e)$$

$$y = r \sin f = a\sqrt{1-e^2}\sin E$$

$$r = a(1 - e\cos u)$$

segue che $r^2 = x^2 + y^2 = a^2\left[\cos^2 E + e^2 - 2e\cos E + (1-e^2)\sin^2 E\right]$

$$= a^2\left[\cos^2 E + \sin^2 E + e^2 - 2e\cos E - e^2 \sin^2 E\right]$$

$$= a^2\left[1 - 2e\cos E + e^2(1-\sin^2 E)\right] = a^2(1 - e\cos E)^2$$