REGIONE AMMISSIBILE

SHOOTING STAR LIMIT (o LIMITE degli OGGETTI PICCOLI)

$H(\rho) \leq H_{max}$ $\quad$ H = magnitudine assoluta

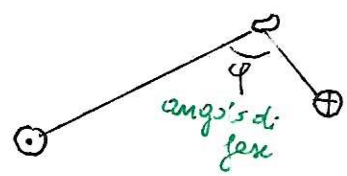
$$\boxed{H = h - 5\log_{10}\rho - x(\rho)}$$

h = magnitudine apparente

$x(\rho)$ = correzione per la distanza dal Sole e l'effetto di fase

$\boxed{\text{OSS}}$ Per ρ piccolo la dipendenza da ρ in $x(\rho)$ è trascurabile, infatti la distanza dal Sole è ~ 1

di solito si approssima $x(\rho)$ con una quantità x_0 indip. da ρ.



$$H_{max} \geq H = h - 5\log_{10}\rho - x_0$$

$$\log_{10}\rho \geq \frac{h - H_{max} - x_0}{5} =: \log \rho_H$$

da cui si ottiene $\boxed{\rho \geq \rho_H := 10^{\frac{h - H_{max} - x_0}{5}}}$

DEFINIZIONE ALTERNATIVA di REGIONE AMMISSIBILE

$$\left\{ (\rho, \dot\rho) : \rho \geq \rho_H,\ \mathcal{E}_\odot(\rho,\dot\rho) \leq 0 \right\}$$

REGIONE AMMISSIBILE

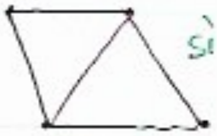
CAMPIONAMENTO delle REGIONE

Triangolazione di Delaunay $\qquad \tilde{D}$ dominio poligonale

(Π, τ) $\quad \Pi = \{P_1, \dots, P_N\}$ $\; P_j$ punti

$\tau = \{T_1, \dots, T_K\}$ $\; T_i$ triangoli

NO



SÌ

Proprietà ~~delle~~ di una triangolazione

(i) $\bigcup_{i=1}^{K} T_i = \tilde{D}$

(ii) $\forall\, i \neq j$ $\; T_i \cap T_j$ è $\emptyset$, oppure un vertice, oppure un lato di un triangolo

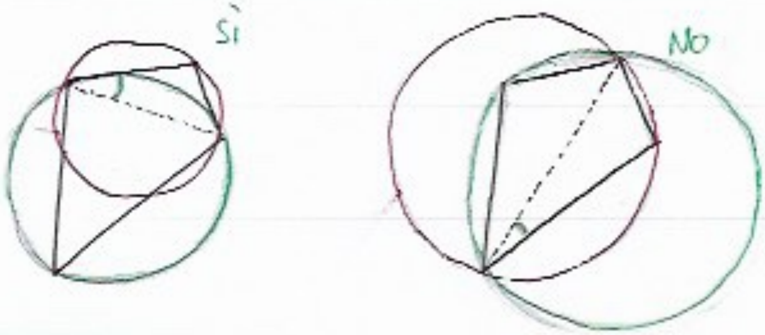
Tra tutte le possibili triangolazioni di un dominio convesso ci sono quelle di Delaunay, caratterizzate dalle seguenti proprietà:

(1) τ massimizza l'angolo minimo

(2) minimizza il massimo cerchio circoscritto

(3) $\forall$ triangolo T_i, la parte interna del suo cerchio circoscritto non contiene nodi della triangolazione.

queste proprietà sono equivalenti per domini $\tilde{D}$ convessi



REGIONE AMMISSIBILE

OSS Il dominio $\tilde{D}$ nel nostro caso può non essere convesso.

Si usa una triangolazione vincolata (contiene dei lati prescritti)

- Ne esiste una per cui valgono le proprietà (1), (2) di sopra, ma non necessariamente la (3).

- Prima si campiona il bordo della R.A. e poi si aggiungono nodi interni, mantenendo le proprietà di Delaunay.

STRUTTURA delle REGIONI di CONFIDENZA

Γ_A = matrice di covarianza di un attribuibile A

$X = [A, B]$ elementi orbitali $\quad A = (\alpha, \delta, \dot{\alpha}, \dot{\delta})$

$\quad B = (\rho, \dot{\rho})$

$C_A = \Gamma_A^{-1}$ si interpreta come matrice normale condizionale, assumendo che B abbia un dato valore, per esempio uno dei nodi della triangolazione.

quindi Γ_A è la matrice di covarianza condizionale

$$\Gamma_X = \begin{bmatrix} \Gamma_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ mat. di cov. condiz. per X

$$C_X = \begin{bmatrix} C_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ pseudo-inversa

REGIONE AMMISSIBILE

La covarianza Γ_X può essere propagata, anche se degenere

$$\mathbb{R}^6 \ni X \longmapsto Y(X) \in \mathbb{R}^6 \qquad \Gamma_Y = \frac{\partial Y}{\partial X}\, \Gamma_X \left[\frac{\partial Y}{\partial X}\right]^T$$

$$C_Y = \left[\frac{\partial X}{\partial Y}\right]^T C_X\, \frac{\partial X}{\partial Y}$$ propagazione della matrice normale

STRUTTURA QUASI-PRODOTTO

A_1 = attribuibile nominale, con matrice di covarianza $\Gamma_{A_1} = \Gamma_A(A_1)$

$$Z_X(\sigma) = \left\{ (A,B) : (A-A_1)\cdot C_{A_1}(A-A_1) \le \sigma^2,\ B \in \mathcal{D}(A) \right\}$$

dove $\mathcal{D}(A)$ = reg. ammissibile corrispondente ad A.

Approssimiamo $Z_X(\sigma)$ con

$$Z^1_X(\sigma) = \left\{ A : (A-A_1)\cdot C_{A_1}(A-A_1) \le \sigma^2 \right\} \times \mathcal{D}(A_1)$$ a prodotto cartesiano

CAMPIONAMENTO di $\mathcal{D}(A_1)$

$$\left\{ X^i = (A_1, B_1^i) \right\}_{i=1\dots K} \qquad B_1^i = (\rho_i, \dot\rho_i) \quad i = 1\dots K$$

sono i <u>nodi</u> della triangolazione di Delaunay di $\mathcal{D}(A_1)$.

$$t_1^i = \bar{t}_1 - \frac{\rho_i}{c}$$ correzione per aberrazione per ogni nodo.

REGIONE AMMISSIBILE

PREDIZIONI da un ATTRIBUIBILE

X^i, t_1^i con matrice di covarianza $\Gamma_{X^i} := \Gamma_X(X^i)$

$i = 1, \dots, K$

faccio una predizione al tempo $\bar{t}_2$: $Y^i = \Phi_{t_1^i}^{\bar{t}_2}(X^i)$

$Y^i, \bar{t}_2$ con matrice di covarianza: $\boxed{\Gamma_{Y^i} = \frac{\partial Y^i}{\partial X^i}\, \Gamma_{X^i} \left[\frac{\partial Y^i}{\partial X^i}\right]^T}$

calcolo la funzione osservazione

$\mathcal{A} : Y^i \longmapsto A^i$ attribuibile predetto da X^i al tempo $\bar{t}_2$

Si ha $$\Gamma_{A^i} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial Y}\right|_{Y^i} \Gamma_{Y^i} \left[\left.\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial Y}\right|_{Y^i}\right]^T$$

quindi $$\Gamma_{A^i} = \left.\frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial X}\right|_{X^i} \Gamma_{X^i} \left[\left.\frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial X}\right|_{X^i}\right]^T$$

genericamente ha rango 4

$$= \left.\frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial A}\right|_{X^i} \underbrace{\Gamma_{A_1}} \left[\left.\frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial A}\right|_{X^i}\right]^T$$

è l'unico blocco non nullo in Γ_{X^i}

con $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \circ \Phi_{t_1^i}^{\bar{t}_2}$

Γ_{A^i} è la matrice di covarianza marginale associata ad A^i, una parte delle componenti di Y^i

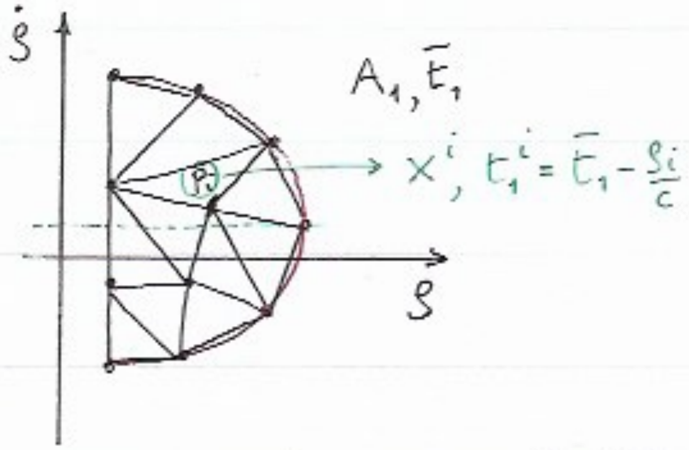
REGIONE AMMISSIBILE

Se esistono $C_{A^i} = \Gamma_{A^i}^{-1}$, $M = \left[\frac{\partial A'}{\partial A} \Big|_{X^i} \right]^{-1}$

allora $C_{A^i} = M^T C_{A_1} M$ definisce un ellissoide di confidenza per la predizione A^i, corrispondente all'ipotesi B_1^i :

$$Z_{A^i}(\sigma) = \left\{ A' \;\middle|\; (A'-A^i)^T C_{A^i} (A'-A^i) \leq \sigma^2 \right\}$$

LINKAGE per campionamento della REGIONE AMMISSIBILE



$A_2, \bar{t}_2$
altro attribuibile, da provare a "linkare"

- Si fa una predizione per l'attribuibile A^i al tempo $\bar{t}_2$ a partire da X^i
- si assegna una matrice di covarianza condizionale Γ_{X^i} ad X^i, data la scelta del modo P_i : $\Gamma_{X^i} = \begin{bmatrix} \Gamma_{A_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Gamma_{A_1} = C_{A_1}^{-1}$
- si propagano orbita e covarianza al tempo $\bar{t}_2$, ottenendo

$$Y^i = \Phi_{t_1^i}^{\bar{t}_2}(X^i) \ , \quad \Gamma_{Y^i} = \frac{\partial Y^i}{\partial X^i} \Gamma_{X^i} \left[\frac{\partial Y^i}{\partial X^i} \right]^T$$

con $\frac{\partial Y^i}{\partial X^i} := \frac{\partial \Phi_{t_1^i}^{\bar{t}_2}}{\partial X}(X^i)$.

REGIONE AMMISSIBILE

- data le funzione di osservazione $A : Y^i \to A^i$
si ottiene la predizione A^i per l'attribuibile e si considera la matrice di covarianze marginale

$$\Gamma_{A^i} = \frac{\partial A}{\partial Y}\Big|_{Y^i} \Gamma_{Y^i} \left[\frac{\partial A}{\partial Y}\Big|_{Y^i}\right]^T = \frac{\partial A'}{\partial A}\Big|_{X^i} \Gamma_{A_1} \left[\frac{\partial A'}{\partial A}\Big|_{X^i}\right]^T$$

<u>OSS</u> dobbiamo applicare una correzione per aberrazione

$$A' = A \circ \Phi_{t_1^i}^{\bar{t}_2} \qquad \text{propago al tempo } t$$

A questo punto <u>facciamo una attribuzione</u>:

Dati: $A_2, \bar{t}_2, \Gamma_2, C_2 = \Gamma_2^{-1}$
$A^i, t_2, \Gamma_{A^i}, C_{A^i} = \Gamma_{A^i}^{-1}$ attribuibile predetto a partire da B_1^i, con le sue matrici di cov. e normale.

L'algoritmo di identificazione è lo stesso che abbiamo introdotto per l'identificazione di orbite:

$$\begin{cases} C_0 = C_{A^i} + C_2, \quad \Gamma_0 = C_0^{-1} & \text{matrici normali e di covarianze} \\ K_4^i = (A_2 - A^i) \cdot \left[C_2 - C_2 \Gamma_0 C_2 \right] (A_2 - A^i) & \text{penalità} \\ A_0 = \Gamma_0 \left[C_{A^i} A^i + C_2 A_2 \right] & \text{attribuibile di compromesso.} \end{cases}$$

Se $K_4^i \leq K_4^{max}$ si (possono fare le correzioni differenziali, o anche) ~~fermo~~ delle <u>correzioni differenziali vincolate</u>.