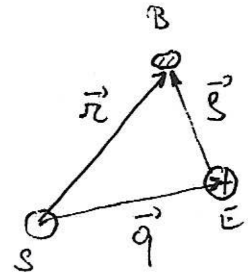
REGIONE AMMISSIBILE



$\vec{r} = \vec{q} + \vec{\rho}$

$A = (\alpha, \delta, \dot{\alpha}, \dot{\delta})$ al tempo $\bar{t}$

$\rho, \dot{\rho}$ incognite

B = corpo celeste (asteroide)

OBIETTIVO : CONFINARE $(\rho, \dot{\rho})$ IN UNA REGIONE COMPATTA

Assumiamo che B sia un satellite del Sole : $\boxed{\mathcal{E}_\odot \leq 0}$ (1)

dove $\mathcal{E}_\odot(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2} |\dot{\vec{r}}(\rho, \dot{\rho})|^2 - \frac{k^2}{|\vec{r}(\rho)|}$ energia a 2 corpi asteroide - Sole (per unità di massa dell'ast)

$k \approx 0{,}017202$ costante di Gauss

$\vec{r} = \vec{q} + \rho \hat{\rho}$ $\qquad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{q}} + \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho (\dot{\alpha} \hat{\rho}_\alpha + \dot{\delta} \hat{\rho}_\delta)$

$$\begin{cases} \hat{\rho} = (\cos\alpha \cos\delta, \sin\alpha \cos\delta, \sin\delta) \\ \hat{\rho}_\alpha = \dfrac{\partial \hat{\rho}}{\partial \alpha} = (-\sin\alpha \cos\delta, \cos\alpha \cos\delta, 0) \\ \hat{\rho}_\delta = \dfrac{\partial \hat{\rho}}{\partial \delta} = (-\cos\alpha \sin\delta, -\sin\alpha \sin\delta, \cos\delta) \end{cases}$$

$\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}_\alpha = \hat{\rho} \cdot \hat{\rho}_\delta = \hat{\rho}_\alpha \cdot \hat{\rho}_\delta = 0$

$|\hat{\rho}| = |\hat{\rho}_\delta| = 1 \, ; \; |\hat{\rho}_\alpha| = \cos\delta$

$$|\vec{r}(\rho)|^2 = \rho^2 + 2\rho \, \vec{q} \cdot \hat{\rho} + q^2$$

$$|\dot{\vec{r}}(\rho, \dot{\rho})|^2 = \dot{\rho}^2 + 2 \dot{\rho} \, \dot{\vec{q}} \cdot \hat{\rho} + \rho^2 (\dot{\alpha}^2 \cos^2\delta + \dot{\delta}^2) + 2\rho (\dot{\alpha} \, \dot{\vec{q}} \cdot \hat{\rho}_\alpha + \dot{\delta} \, \dot{\vec{q}} \cdot \hat{\rho}_\delta) + |\dot{\vec{q}}|^2$$

Introduco i coefficienti

$$\boxed{\begin{gathered} c_0 = |q|^2 \, ; \; c_1 = 2 \dot{\vec{q}} \cdot \hat{\rho} \, ; \; c_2 = \dot{\alpha}^2 \cos^2\delta + \dot{\delta}^2 = \eta^2 \\ c_3 = 2 \dot{\alpha} \, \dot{\vec{q}} \cdot \hat{\rho}_\alpha + 2 \dot{\delta} \, \dot{\vec{q}} \cdot \hat{\rho}_\delta \, ; \; c_4 = |\dot{\vec{q}}|^2 \, ; \; c_5 = 2 \vec{q} \cdot \hat{\rho} \end{gathered}}$$

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = 2 T_\odot(\rho, \dot{\rho}) = \dot{\rho}^2 + c_1 \dot{\rho} + \underbrace{c_2 \rho^2 + c_3 \rho + c_4}_{= W(\rho)}$$

$$|r|^2 = S(\rho) := \rho^2 + c_5 \rho + c_0$$

REGIONE AMMISSIBILE

La (1) diventa

$$2\,\mathcal{E}_\odot(\rho,\dot\rho) = \dot\rho^2 + c_1\dot\rho + W(\rho) - \frac{2K^2}{\sqrt{S(\rho)}} \leq 0$$

Per avere soluzioni reali per $\dot\rho$ impongo che

$$\text{discrim}\left(\mathcal{E}_\odot\right) \geq 0$$

cioè

$$\frac{c_1^2}{4} - W(\rho) + \frac{2K^2}{\sqrt{S(\rho)}} \geq 0$$

Poniamo $\gamma = c_4 - \frac{c_1^2}{4}$ $(\gamma \geq 0)$

$$P(\rho) = c_2\rho^2 + c_3\rho + \gamma$$

quindi $\mathcal{E}_\odot \leq 0 \Rightarrow \boxed{-P(\rho) + \frac{2K^2}{\sqrt{S(\rho)}} \geq 0}$ $(*)$ (per avere soluz. $\dot\rho$ reali)

$\boxed{\text{OSS}}$ $P(\rho) \geq 0 \quad \forall\rho$, infatti $P(\rho) = -\,\text{discrim}\left(T_\odot(\rho,\dot\rho)\right)$

$$= -\left[\frac{c_1^2}{4} - \left(c_2\rho^2 + c_3\rho + c_4\right)\right]$$

$T_\odot$ è un'energia cinetica $\Rightarrow T_\odot(\rho,\dot\rho) \geq 0 \Rightarrow \text{discrim}\left(T_\odot\right) \leq 0$

Inoltre $S(\rho) \geq 0$; elevo al quadrato ~~...~~ ottengo che

dove $\boxed{V(\rho) = P^2(\rho)\,S(\rho) = \sum_{i=0}^{6} A_i\,\rho^i}$ per dei coeff. A_i.

~~...~~ $(*) \Leftrightarrow \boxed{V(\rho) \leq 4K^4}$

REGIONE AMMISSIBILE

COMPONENTI CONNESSE

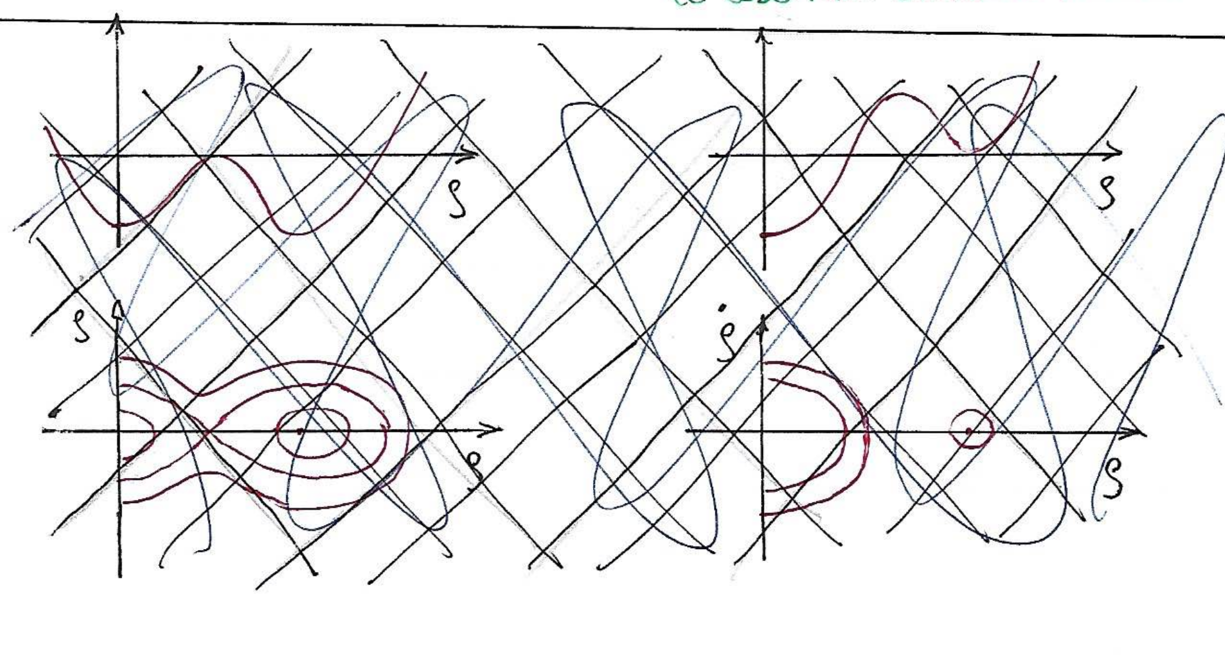
$\boxed{\text{TEOR 1}}$ La regione $\{(\rho,\dot\rho) : \mathcal{E}_\odot(\rho,\dot\rho) \leq 0\}$ ha al più 2 c.c.

$\boxed{\text{LEMMA 1}}$ (esistenza di soluzioni) Se η o γ è > 0, allora ci sono almeno 2 soluzioni di $V(\rho) = 4K^4$, una positiva e l'altra negativa.

DIM. $$V(0) - 4K^4 = A_0 - 4K^4 = C_0\gamma^2 - 4K^4 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tralascio } -C_1^2/4}}{\leq} C_0 C_4^2 - 4K^4$$

$$= |\vec{q}|^2 |\dot{\vec{q}}|^4 - 4K^4 < 0$$

infatti $\frac{1}{2}|\dot{\vec{q}}|^2 - \frac{K^2}{|\vec{q}|} < 0$ (è l'energia eliocentrica della Terra;) se si considera la correzione topocentrica le cose non cambiano molto.



REGIONE AMMISSIBILE

LEMMA 2 L'equazione $V'(\rho) = 0$ non può avere più di 3 soluzioni distinte.
Se ha esattamente 3 radici reali distinte, allora non ci possono essere radici di molteplicità 2.

$$V(\rho) = P^2(\rho)\, S(\rho) \quad \text{con} \quad \begin{cases} P(\rho) = c_2 \rho^2 + c_3 \rho + \gamma \\ S(\rho) = \rho^2 + c_5 \rho + c_0 \end{cases}$$

$$V'(\rho) = P(\rho) \left[2\, P'(\rho)\, S(\rho) + P(\rho)\, S'(\rho) \right] \quad \text{ha grado } 5$$

$P(\rho) \geq 0 \ \forall \rho \implies$ $\boxed{\text{P non ha radici reali}}$ (1) ó $\boxed{\text{P ha una radice di molteplicità 2}}$ (2)

Nel caso (1) $\quad P(\rho) > 0 \implies \dfrac{V'(\rho)}{P(\rho)}$ ha grado 3 $\implies$ ha al più 3 radici reali, e lo stesso vale per $V'(\rho)$

Nel caso (2), se $P(\rho)$ ha una radice doppia, allora questa è una radice tripla di $V'(\rho)$, e ci sono al più altre 2 radici.

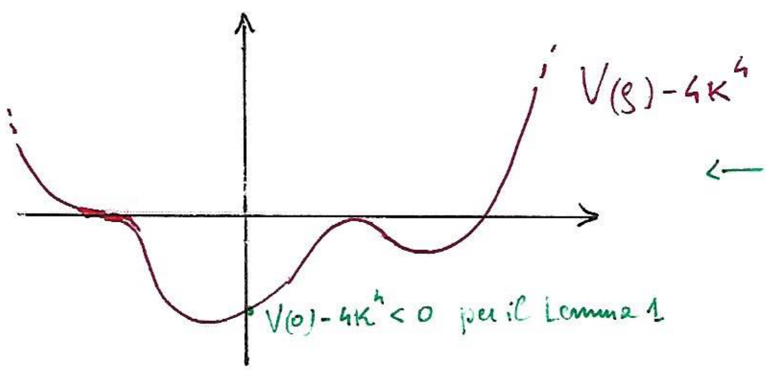
Se $V'(\rho)$ ha 3 radici reali distinte (inclusa una multipla) allora $\exists\ \bar{\rho}$ radice di P tale che è almeno una radice tripla di $V'(\rho)$; le altre 2 radici devono essere semplici.

DIM. TEOR 1

- Per il Teor. di Rolle, tra 2 radici di $V(\varrho)-4K^4$ ci deve essere una radice di $V'(\varrho)$

- Non ci può essere un numero dispari di radici reali di $V(\varrho)-4K^4$, contate con molteplicità, poiché $V(\varrho)$ è un polinomio reale con grado pari. (le radici complesse appaiono a coppie $(\varrho, \bar{\varrho})$)

- Almeno 2 radici reali di $V(\varrho)-4K^4$ hanno molteplicità dispari.



← serve una radice di molteplicità dispari per passare da sotto a sopra.

Usando i 2 lemmi e le osservazioni sopra restano le seguenti possibilità:

(i) 4 radici distinte e semplici (2 c.c.)

(ii) 3 radici distinte: 2 semplici ed 1 con molteplicità pari

(iii) 2 radici distinte: 1 semplice e l'altra con molt. dispari (1 c.c.)

Infatti [Lemma 2 + Teor. di Rolle] $\Rightarrow$ non ci possono essere più di 4 sol. distinte di $V(\varrho)-4K^4=0$

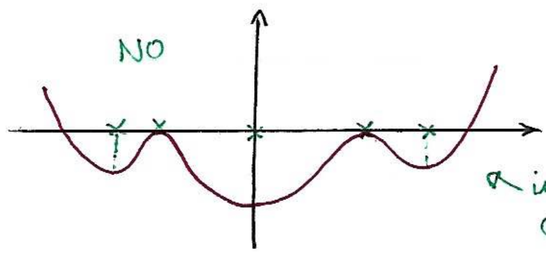
REGIONE AMMISSIBILE

(i) se ci sono 4 radici distinte di $V(\rho) - 4K^4$, allora ce ne sono almeno 3 distinte di V'.

Lemma 2 (parte 2) $\Rightarrow$ non ci sono radici di V' con molt. 2

quindi non ci sono radici di $V - 4K^4$ con molt. 3. ~~e le radici sono tutte semplici~~

Nel caso di 4 radici distinte non c'è spazio per molt. superiore (a 3).

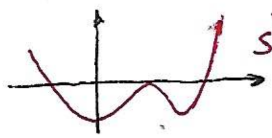


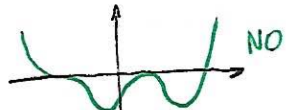
Non ci sono nemmeno radici di $V - 4K^4$ con molteplicità 2. (se ci fosse una radice di molt. 2 ce ne sarebbe anche un'altra per avere 4 radici distinte)

in questo caso avrei 5 radici distinte di V' contraddicendo il Lemma 2.

(ii) se ce ne sono 3 distinte, allora ci sono almeno 2 radici distinte di V'. (Rolle)

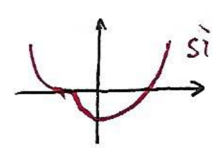
Solo 1 delle 3 può avere molt. > 1, altrimenti V' avrebbe > 3 radici.

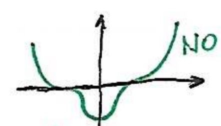




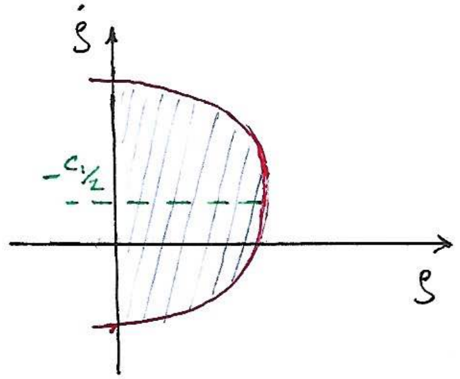
La molteplicità in questo caso deve essere pari (2 o 4)

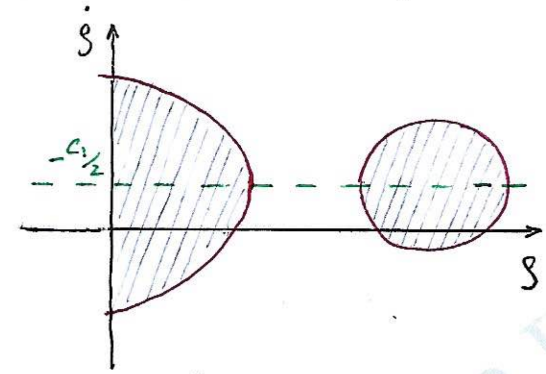
(iii) 2 radici distinte : 1 semplice e l'altra deve avere molt. dispari.





se V' ha 3 radici queste sono semplici





infatti
$$2\mathcal{E}_0 = \left(\dot\rho + \frac{c_1}{2}\right)^2 \underbrace{- \frac{c_1^2}{4} + W(\rho)}_{P(\rho)} - \frac{2K^2}{\sqrt{S(\rho)}}$$

REGIONE AMMISSIBILE

Assumiamo che B non sia un satellite della Terra : $\boxed{\mathcal{E}_\oplus \geq 0}$ (2)

dove $\mathcal{E}_\oplus(\rho,\dot\rho) = \frac{1}{2}|\dot{\vec\rho}|^2 - \frac{k^2\mu_\oplus}{\rho}$ $\qquad \mu_\oplus = \frac{m_\oplus}{m_\odot}$

$$|\dot{\vec\rho}|^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\eta^2 \quad \text{con } \eta = \sqrt{\dot\alpha^2\cos^2\delta + \dot\delta^2}$$

La (2) si scrive anche $\dot\rho^2 + \rho^2\eta^2 - \frac{2k^2\mu_\oplus}{\rho} \geq 0$

cioè $\dot\rho^2 \geq G(\rho) := \frac{2k^2\mu_\oplus}{\rho} - \rho^2\eta^2$

Osservo che $G(\rho) > 0$ se $0 < \rho < \rho_0 = \sqrt[3]{2k^2\mu_\oplus/\eta^2}$.

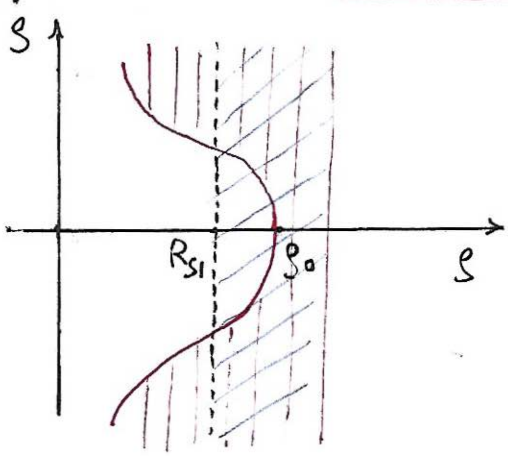
Dobbiamo anche considerare il raggio della sfera di influenza della Terra

$$\boxed{\rho \geq R_{SI} = a_\oplus\sqrt[3]{\frac{\mu_\oplus}{3}}} \quad (3)$$

$a_\oplus$ è il semiasse maggiore dell'orbita Terrestre.

Si escludono i satelliti della Terra richiedendo che valga

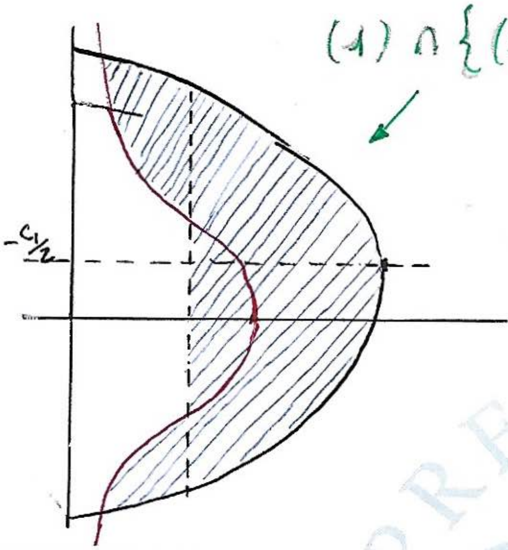
$$\boxed{(2) \text{ oppure } (3)}$$



$\dot\rho = \pm\sqrt{\frac{2k^2\mu_\oplus}{\rho} - \rho^2\eta^2}$

ci dà la curva rossa

L'idea è considerare la regione $(1) \cap \{(2)\cup(3)\}$



REGIONE AMMISSIBILE

$\boxed{\text{TEOR. 2}}$ Per $R_\oplus \le \rho \le R_{SI}$ si ha

$$\mathcal{E}_\oplus(\rho,\dot\rho) \le 0 \implies \mathcal{E}_\odot(\rho,\dot\rho) \le 0$$

DIM. Per la disuguaglianza triangolare, per dim. che $\mathcal{E}_\odot(\rho,\dot\rho) \le 0$ basta mostrare che
$$\left(|\dot{\vec r} - \dot{\vec q}| + |\dot{\vec q}|\right)^2 \le \frac{2K^2}{|\vec r - \vec q| + |\vec q|}$$

Osservo che
$$\mathcal{E}_\oplus(\rho,\dot\rho) \le 0 \iff |\dot{\vec r} - \dot{\vec q}| \le \sqrt{\frac{2K^2\mu_\oplus}{\underbrace{|\vec r - \vec q|}_{=\rho}}} \qquad (*)$$

Usando $(*)$ dobbiamo solo mostrare che
$$\frac{2K^2\mu_\oplus}{\rho} + |\dot{\vec q}|^2 + 2|\dot{\vec q}|\sqrt{\frac{2K^2\mu_\oplus}{\rho}} \le \frac{2K^2}{\rho + q} \qquad \text{per } R_\oplus \le \rho \le R_{SI}$$

$$\left[\begin{aligned} \text{infatti } \left(|\dot{\vec r} - \dot{\vec q}| + |\dot{\vec q}|\right)^2 &= |\dot{\vec r} - \dot{\vec q}|^2 + |\dot{\vec q}|^2 + 2|\dot{\vec q}|\,|\dot r - \dot q| \\ &\le \frac{2K^2\mu_\oplus}{\rho} + |\dot{\vec q}|^2 + 2|\dot{\vec q}|\sqrt{\frac{2K^2\mu_\oplus}{\rho}} \end{aligned}\right]$$

Questo è equivalente a mostrare che la funzione
$$F(\rho) = 2K^2\mu_\oplus(\rho+q) + \rho(\rho+q)|\dot{\vec q}|^2 + 2|\dot{\vec q}|\sqrt{2K^2\mu_\oplus}\,\sqrt{\rho}\,(\rho+q) - 2K^2\rho$$
è <u>non-positiva</u> in $[R_\oplus, R_{SI}]$.

Osservo che
$$F'(\rho) = \frac{g_1(\rho) + g_2(\rho)}{\sqrt\rho} \quad \text{con} \quad \begin{cases} g_1(\rho) = \sqrt\rho\left(\mathcal{C} + 2|\dot{\vec q}|^2\rho\right) \\ g_2(\rho) = |\dot{\vec q}|\sqrt{2K^2\mu_\oplus}\,(3\rho + q) \end{cases}$$

dove $\mathcal{C} = 2K^2\mu_\oplus + q|\dot{\vec q}|^2 - 2K^2$

REGIONE AMMISSIBILE

infatti $F'(\rho) = 2K^2\mu_\oplus + 2\rho|\dot{\vec{q}}|^2 + q|\dot{\vec{q}}|^2 + 2|\dot{\vec{q}}|\sqrt{2K^2\mu_\oplus}\left(\frac{\rho+q}{2\sqrt{\rho}} + \sqrt{\rho}\right) - 2K^2$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\sqrt{\rho}\left(2K^2\mu_\oplus + q|\dot{\vec{q}}|^2 - 2K^2\right) + 2|\dot{\vec{q}}|^2\rho^{3/2} + 2|\dot{\vec{q}}|\sqrt{2K^2\mu_\oplus}\,(3\rho+q)\right]$$

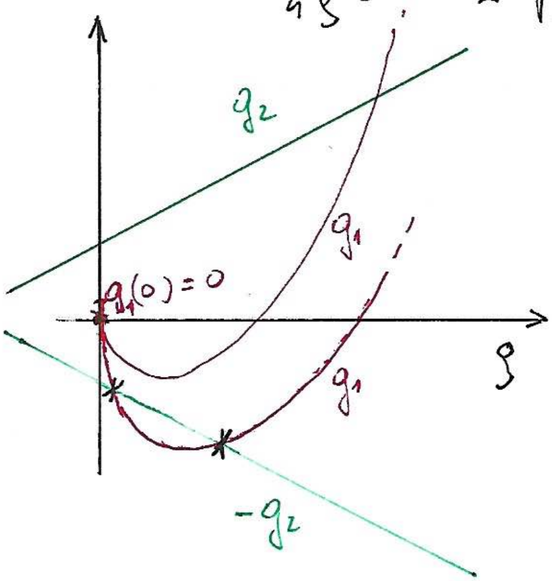
$\boxed{\text{OSS}}$ $\quad \mathcal{C} \leq -2.8075\times10^{-4} < 0$

UNITÀ di MISURA: $\begin{cases} [L] = \text{au} \\ [T] = \text{days} \\ [M] = m_\oplus \end{cases}$

$$g_1'(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\left(\mathcal{C} + 2|\dot{\vec{q}}|^2\rho\right) + 2|\dot{\vec{q}}|^2\sqrt{\rho}$$

$$g_1''(\rho) = -\frac{1}{4\rho^{3/2}}\left(\mathcal{C} + 2|\dot{\vec{q}}|^2\rho\right) + \frac{\cancel{2}|\dot{\vec{q}}|^2}{\cancel{2}\sqrt{\rho}} + \frac{\cancel{2}|\dot{\vec{q}}|^2}{\cancel{2}\sqrt{\rho}}$$

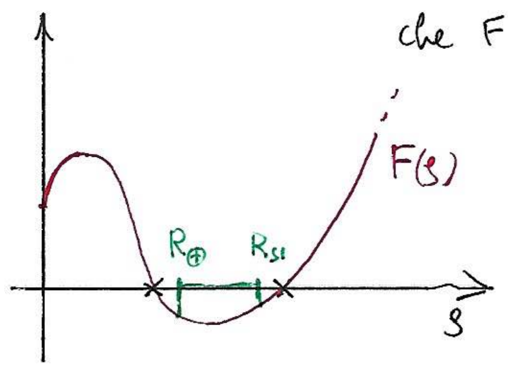
$$= -\frac{\mathcal{C}}{4\rho^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{|\dot{\vec{q}}|^2}{\sqrt{\rho}} + 2\frac{|\dot{\vec{q}}|^2}{\sqrt{\rho}} > 0$$



$$\begin{cases} \lim_{\rho\to+\infty} F(\rho) = +\infty \\ F(0) = 2K^2\mu_\oplus q > 0 \\ \lim_{\rho\to0^+} F'(\rho) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{F(\rho) \text{ non può avere più di 2 zeri per } \rho > 0}$$

infatti, da $F'(\rho) = \dfrac{g_1(\rho) + g_2(\rho)}{\sqrt{\rho}}$ si vede che F' non può avere più di 2 zeri per $\rho > 0$,

per cui



Infine, usando le stime

$$\begin{cases} F(R_\oplus) \leq -2.49\times10^{-10} < 0 \\ F(R_{SI}) \leq -2.6346\times10^{-6} < 0 \end{cases}$$

concludo che $F(\rho) < 0$ per $\rho \in [R_\oplus, R_{SI}]$

REGIONE AMMISSIBILE

Consideriamo le 4 condizioni seguenti associate ad un attribuibile A:

(A) $\mathcal{E}_\odot \le 0$

(B) $\mathcal{E}_\oplus \ge 0$

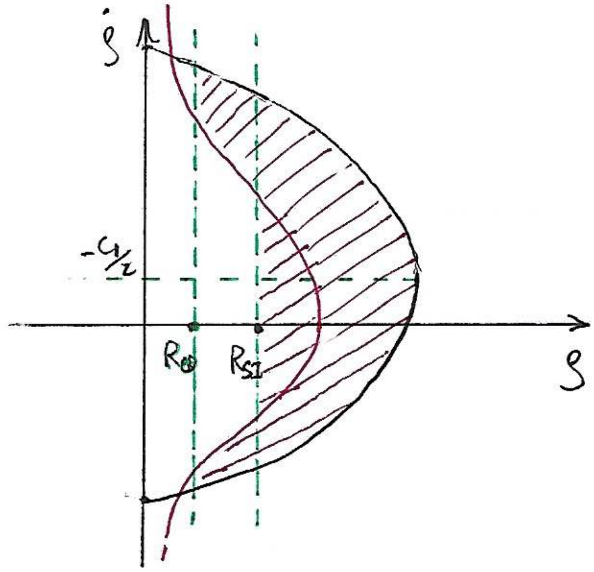
(C) $\rho \ge R_{SI}$

(D) $\rho \ge R_\oplus$

e indichiamo con D_A, D_B, D_C, D_D gli insiemi di coppie $(\rho, \dot\rho) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ in cui valgono (A), (B), (C), (D) rispettivamente

DEF La *regione ammissibile* è il dominio

$$\cancel{D = \{D_1 \cup D_2\}} \qquad \boxed{D = D_A \cap \left[D_B \cup D_C \right] \cap D_D}$$



OSS Il Teor. 2 ci dice che, se $\rho \in [R_\oplus, R_{SI}]$ allora $\{\mathcal{E}_\oplus \le 0\} \subset \{\mathcal{E}_\odot \le 0\}$, quindi le intersezioni tra $\mathcal{E}_\oplus = 0$ ed $\mathcal{E}_\odot = 0$ avvengono fuori da questo intervallo di valori di ρ.