

Compito di Meccanica Razionale

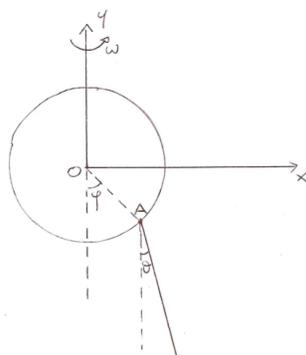
23 Gennaio 2020

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente, e si consideri il sistema meccanico costituito da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza 2ℓ . L'estremo A dell'asta è vincolato a scorrere su una guida circolare di raggio R centrata nell'origine O . Tale piano ruota attorno all'asse Oy con velocità angolare costante ω . Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g . Si usino come coordinate gli angoli φ e θ che il segmento OA e l'asta formano rispettivamente con la direzione verticale. Nel sistema di riferimento ruotante

- calcolare l'energia cinetica del sistema;
- calcolare l'energia potenziale delle forze attive.



Secondo Esercizio

Si consideri un punto materiale P di massa m libero di muoversi in un campo di forze centrali

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\mathbf{e}_\rho, \quad f(\rho) = \rho^5 - 2\alpha\rho,$$

con centro l'origine, dove $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\rho = |\mathbf{x}|$ e $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{x}/\rho$.

- Studiare qualitativamente il moto del punto materiale, analizzando i casi che si presentano al variare del parametro α e delle condizioni iniziali;
- discutere l'esistenza di orbite circolari e in caso affermativo trovarne il periodo;
- al variare di α , trovare i valori dell'energia totale e del momento angolare per cui esistono delle orbite limitate.

Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico con vincoli ideali dato da due aste omogenee AB e PQ , aventi massa M, m e lunghezza $R, 2\ell$ rispettivamente. L'estremo A dell'asta AB è incernierato nell'origine O e tale asta è vincolata a muoversi nel piano verticale Oyz . All'estremo B è incernierato il punto medio dell'altra asta PQ . Quest'ultima è vincolata a muoversi mantenendosi parallela al piano Oxy (quindi i punti P, Q, B hanno sempre la stessa componente z). Una molla di costante elastica k collega l'estremo Q al piano orizzontale Oxy , mantenendosi sempre verticale. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g . Inoltre, in Q agisce anche una forza $\vec{F} = -F\hat{e}_1$, con $F > 0$ costante ed \hat{e}_1 il versore dell'asse Ox .

Si usino come coordinate l'angolo θ formato dall'asta AB con la direzione verticale e l'angolo φ formato dal segmento BQ con la semiretta passante per B avente direzione e verso dell'asse Ox .

Supponendo che le aste non si scontrino durante il moto

- scrivere la lagrangiana del sistema;
- trovare le condizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri;
- calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione $(\theta, \varphi) = (0, \pi)$ nel caso in cui essa sia un minimo non degenere dell'energia potenziale.

