

# Compitino di Meccanica Razionale

18 giugno 2019

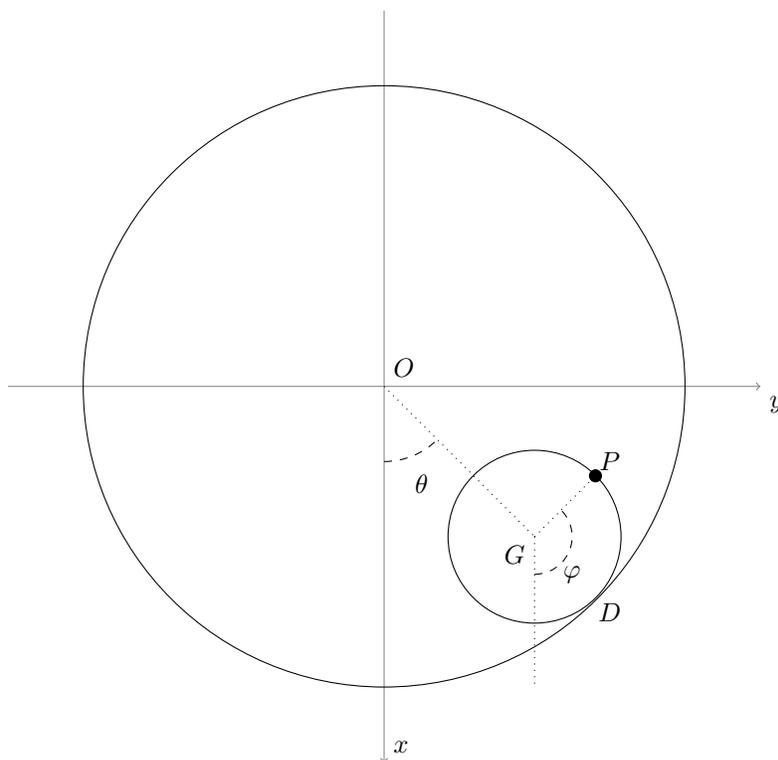
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

## Primo Esercizio

Nel sistema in figura, soggetto a vincoli ideali e disposto in un piano verticale, un disco di massa  $M$  e raggio  $r$  rotola senza strisciare all'interno di una guida circolare di raggio  $R > r$ . Lungo il bordo del disco può scorrere un punto materiale  $P$  di massa  $m$ . Sul sistema agisce la forza di gravità.

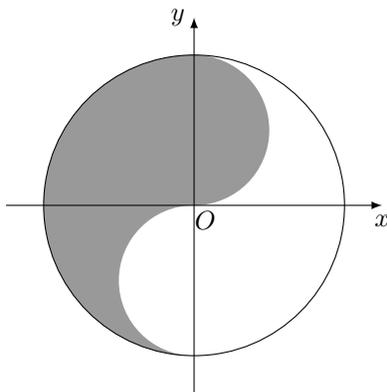
Si indichi con  $G$  il baricentro del disco e con  $D$  il punto di contatto tra la guida ed il disco. Si considerino come coordinate lagrangiane gli angoli  $\theta$  e  $\varphi$  indicati in figura.

Scrivere le equazioni di moto mediante le equazioni cardinali.



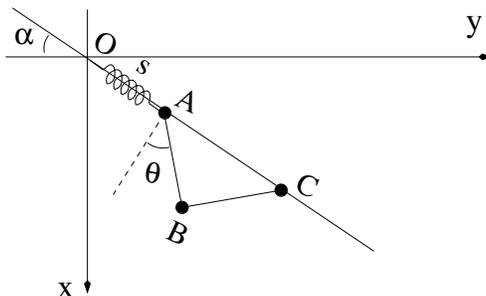
## Secondo Esercizio

Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al polo  $O$  del disco non omogeneo di raggio  $2R$  rappresentato in figura. La parte scura del disco ha densità costante  $2\mu$ , mentre la parte chiara ha densità  $\mu$ . La curva che separa le due parti è composta da due semicirconferenze di raggio  $R$ .



## Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento  $Oxy$ , con asse  $Ox$  verticale discendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico costituito da tre corpi puntiformi  $A$ ,  $B$  e  $C$  di uguale massa  $m$ , vincolati da due sbarrette di massa trascurabile e di ugual lunghezza  $\ell$  che collegano rispettivamente le coppie di punti  $\{A, B\}$  e  $\{B, C\}$ . I corpi  $A$  e  $C$  sono inoltre vincolati a muoversi lungo una guida rettilinea passante per l'origine  $O$ , inclinata di un angolo costante  $\alpha \in (0, \pi/2)$  rispetto alla direzione orizzontale (vedi figura).



Su  $A$  agisce una forza elastica attrattiva di costante  $k > 0$  centrata in  $O$ . Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Assumiamo inoltre che tutti i vincoli siano lisci.

1. Utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa  $s$  del corpo  $A$  lungo la guida, con origine in  $O$ , e l'angolo  $\theta$  (supposto crescente in verso antiorario) che il segmento  $AB$  forma con la direzione normale alla guida scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema;
2. calcolare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità;
3. scrivere l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.