

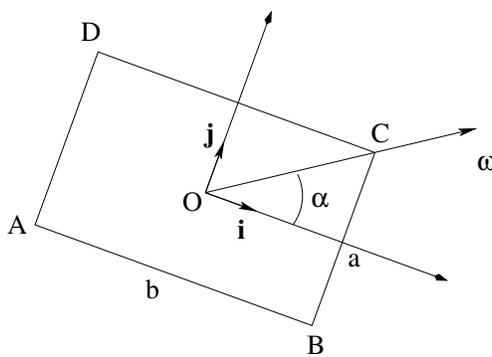
# Compitino di Meccanica Razionale

13 Settembre 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

## Primo Esercizio

Una lamina rettangolare, sottile e omogenea  $ABCD$  di lati  $a$  e  $b$  e massa  $m$  è libera di ruotare attorno al punto fisso  $O$  intersezione delle diagonali. La velocità angolare della lamina è un vettore costante nel tempo di modulo  $\omega$  e con la direzione e il verso del vettore  $AC$  ( $A$  e  $C$  vertici opposti della lamina). Calcolare il momento rispetto al punto  $O$  delle forze attive esterne che causano questo moto. Trovare in quali casi tale momento è nullo.



## Secondo Esercizio

Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  libero di muoversi in un campo centrale con energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}, \quad k > 0,$$

dove  $\rho$  è la distanza di  $P$  dal centro di forze  $O$ . Poniamo

$$A = \frac{c^2}{2m} - k,$$

dove  $c$  è la componente del momento angolare rispetto ad  $O$  lungo la direzione ortogonale al piano del moto. Assumiamo di avere condizioni iniziali per cui l'energia totale  $E$  sia negativa e  $A < 0$ .

- i) Determinare l'estremo superiore  $\rho_{max}$  e l'estremo inferiore  $\rho_{min}$  della distanza di  $P$  dal centro di forze in funzione di  $E$  e di  $c$ , e calcolare il tempo necessario per andare da  $\rho_{max}$  a  $\rho_{min}$ .
- ii) Descrivere la traiettoria della soluzione che parte dalla distanza  $\rho = \rho_{max}$  (con velocità radiale  $\dot{\rho} = 0$ ).
- iii) Scrivere esplicitamente la soluzione dell'equazione di moto.

### Terzo Esercizio

In un piano verticale, un disco di massa  $M$  e raggio  $R$  rotola senza strisciare lungo l'asse delle ascisse. Il centro  $C$  del disco è collegato all'origine del sistema di riferimento tramite una molla di costante elastica  $k$ . Al centro del disco è appesa un'asta di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ . Lungo l'asta può muoversi un punto materiale  $P$  di massa  $\mu$ , collegato al centro del disco tramite una molla di costante elastica  $k$ . Sia  $x$  l'ascissa del centro del disco,  $\theta$  l'angolo che l'asta forma con la verticale e  $s > 0$  l'ascissa del punto  $P$  lungo l'asta, contata positivamente da  $C$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Si supponga  $\ell > \mu g/k$ .

- i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- ii) Trovare le condizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
- iii) Scrivere l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

