Secondo compitino di Istituzioni di Fisica Matematica
19 Dicembre 2018
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Siano date le funzioni

$$H_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + p_1(q_1+q_2), \qquad H_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + p_2(q_1+q_2),$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Trovare le soluzioni dei sistemi hamiltoniani per H_1, H_2 in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$p_1(0) = 1, \qquad p_2(0) = 1, \qquad q_1(0) = 1, \qquad q_2(0) = -1.$$

ii) Trovare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \stackrel{\mathbf{\Psi}}{\to} (\mathbf{P},\mathbf{Q}),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2$, tale che Q_2 sia ciclica per l'hamiltoniana $H = \{H_1, H_2\}$ e determinare due integrali primi in involuzione e indipendenti su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ per il sistema hamiltoniano definito da H.

iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione $K = H \circ \mathbf{\Psi}^{-1}$.

iv) Trovare un sottoinsieme $\mathcal{I}$ di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, invariante per entrambi X_{H_1}, X_{H_2}, tale che i flussi $\mathbf{\Phi}^t_{H_1}$, $\mathbf{\Phi}^t_{H_2}$ ristretti ad $\mathcal{I}$ commutino.

Esercizio 2. Si consideri la hamiltoniana

$$H_\epsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \frac{1}{2}I_2^2 + \epsilon f(\varphi_1, \varphi_2),$$

con $\omega_1 > 0$, e

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) - \sin(\varphi_1 - 2\varphi_2),$$

definita per $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$.

i) Trovare la forma normale risonante di H_ϵ relativa alla risonanza singola definita da $k = (1, -2)$. Scrivere anche l'espressione della funzione generatrice χ che definisce la trasformazione canonica Φ^ϵ_χ usata per passare a tale forma normale.

ii) Descrivere l'andamento delle variabili di azione I_1, I_2 al primo ordine in ϵ all'interno della risonanza considerata e mostrare che in questo caso vale il principio della media.