Esercizi sui moti centrali

Esercizio 1. Un corpo di massa unitaria è soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left(-\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{2\,\rho^3} \right) \mathbf{e}_\rho \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \ ,$$

dove $\rho = |\mathbf{x}|$ è la distanza del corpo dal centro di forza ed $\mathbf{e}_\rho$ è il versore radiale.

a) Scrivere l'energia potenziale efficace e discutere qualitativamente il moto al variare del parametro reale α e della componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto.

b) Discutere l'esistenza di orbite circolari e in caso affermativo trovarne il periodo.

Si consideri poi il moto con condizioni iniziali

$$\mathbf{x}(0) = 2\,\alpha^{\frac{1}{3}}\,\mathbf{e}_\rho(0)\,, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\alpha^{\frac{2}{3}}\,\mathbf{e}_\theta(0)\,,$$

in cui $\mathbf{e}_\theta$ è il versore relativo alla coordinata polare θ, ortogonale ad $\mathbf{e}_\rho$.

c) Esistono dei valori di α per cui tale moto è circolare?

Esercizio 2. Una particella di massa unitaria si muove in un campo di forze centrali con energia potenziale

$$V(r) = \alpha\, r^{-2}\, e^{-f(\beta)\, r} \ ,$$

dove $\alpha > 0, \beta \in \mathbf{R}$, $f(\beta) = \beta^3 - 3\,\beta + 2$ ed r è la distanza della particella dal centro di forze.

1. Scrivere le equazioni di moto della particella utilizzando il formalismo lagrangiano e ridurre al problema unidimensionale esplicitando l'energia potenziale efficace V_e.

2. Trovare i valori di β per i quali tutte le traiettorie possibili sono illimitate.

3. Discutere l'esistenza di orbite circolari e far vedere che se $\beta < -2$ esiste un'unica orbita circolare il cui raggio ρ_c soddisfa $\rho_c > -2/f(\beta)$.

4. Supposto $\beta = 1$ e fissate l'energia E e la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto c calcolare la distanza minima dal centro di forze che la particella può raggiungere.

Esercizio 3. Si consideri un punto materiale P di massa m libero di muoversi in un campo centrale con energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}, \qquad k > 0,$$

dove ρ è la distanza di P dal centro di forze O.

Poniamo

$$A = k - \frac{c^2}{2m},$$

dove c è la componente del momento angolare rispetto ad O lungo la direzione ortogonale al piano del moto. Assumiano di avere condizioni iniziali per cui l'energia totale E sia negativa e $A > 0$.

i) Determinare l'estremo superiore ρ_{max} e l'estremo inferiore ρ_{min} della distanza di P dal centro di forze in funzione di E, c ed il tempo necessario per andare da ρ_{max} a ρ_{min}.

ii) Descrivere la traiettoria della soluzione che parte dalla distanza $\rho = \rho_{max}$ (con velocità radiale $\dot{\rho} = 0$).

iii) Scrivere esplicitamente la soluzione dell'equazione di moto.

Esercizio 4. Un punto materiale di massa unitaria è soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\left(\frac{4}{\rho^3} + \frac{a^2}{\rho^5}\right)\mathbf{e}_\rho \ , \quad a \in \mathbb{R}\,,$$

dove $\rho = |\mathbf{x}|$ ed $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{x}/\rho$ è il versore radiale.

a) Scrivere l'energia potenziale efficace e discutere qualitativamente il moto al variare del parametro a e della componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto.

Si supponga adesso che $a \neq 0$ e si consideri un moto nel quale il punto inizialmente si trova a distanza $\rho_0 = a$ dal centro di forza ed è lanciato perpendicolarmente al raggio vettore $\mathbf{x}$ con velocità $v_0 = \frac{3}{a\sqrt{2}}$.

b) Supponendo che all'istante iniziale il punto stia sulla semiretta $\theta = 0$, determinare l'equazione della traiettoria in forma polare.

Esercizio 5. Un punto materiale P di massa unitaria si muove in un campo di forze centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\,\mathbf{e}_\rho \qquad , \qquad f(\rho) = -\frac{4\,\alpha}{\rho^3} - \frac{\alpha}{\rho^5}$$

con α parametro reale positivo.

a) Studiare qualitativamente il moto del punto P, analizzando i casi che si presentano al variare del parametro α, del modulo del momento angolare c e delle condizioni iniziali.

Supponiamo che il punto P al tempo $t = 0$ si trovi ad una distanza unitaria dal centro di forza e la sua velocità sia perpendicolare al raggio vettore $(P - O)$ e di modulo $3\sqrt{\alpha/2}$.

b) Individuare il tipo di moto e calcolare l'equazione polare della traiettoria.

Esercizio 6. Un punto materiale di massa unitaria si muove in un campo di forze centrali

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\mathbf{e}_\rho \qquad , \qquad f(\rho) = \rho^5 - 2\,\alpha\rho$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Studiare qualitativamente il moto del punto materiale, analizzando i casi che si presentano al variare del parametro α, del momento angolare e delle condizioni iniziali.

b) Discutere l'esistenza di orbite circolari e in caso affermativo trovare il periodo del moto.