Compito di Meccanica Razionale

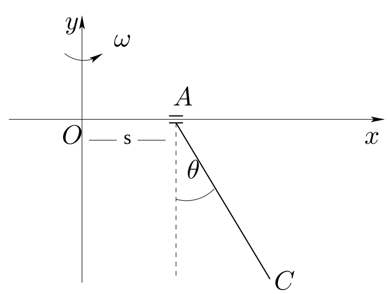
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

9 Gennaio 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Consideriamo un'asta omogenea di estremi A, C, con massa m e lunghezza 2ℓ, che si può muovere in un piano verticale Oxy, con asse Oy verticale ascendente. L'estremo A dell'asta è incernierato nel punto di coordinate $(x, y) = (2\ell, 0)$. Assumiamo che il piano Oxy ruoti uniformemente attorno all'asse Oy con velocità angolare costante $\vec{\omega}$. Sull'asta agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.

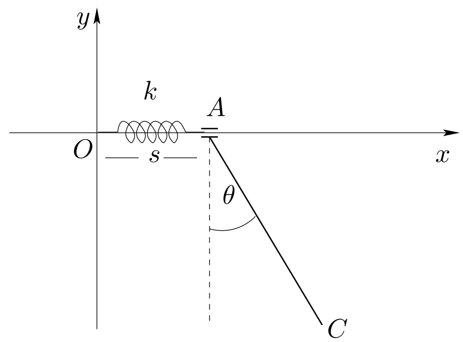


Usando come coordinata l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale

1. calcolare la risultante del sistema delle forze di gravità e centrifughe agenti sull'asta;
2. determinare l'asse centrale relativo al sistema delle sole forze di gravità ed un sistema di forze equivalente ad esso, costituito da un'unica forza applicata ad un punto dell'asta opportunamente scelto;
3. determinare l'asse centrale relativo al sistema delle sole forze centrifughe ed un sistema di forze equivalente ad esso, costituito da un'unica forza applicata ad un punto dell'asta opportunamente scelto.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente, e si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ. L'estremo A dell'asta è vincolato a muoversi senza attrito sull'asse Ox ed è collegato all'origine O da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.

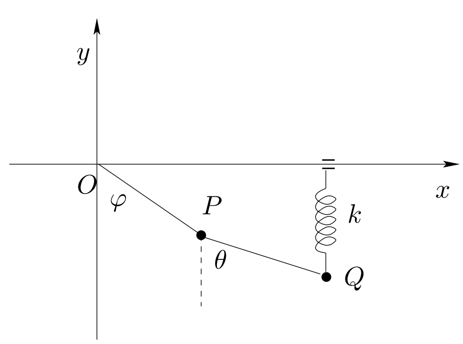


Usando come coordinate l'ascissa s dell'estremo A dell'asta e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale

1. scrivere le equazioni del moto tramite le equazioni cardinali della dinamica;
2. ritrovare le equazioni precedenti con la formulazione lagrangiana.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si possono muovere due aste di uguale lunghezza ℓ e di massa trascurabile. Un estremo della prima asta è incernierato nell'origine O e all'altro estremo è attaccato un corpo puntiforme P di massa m. In P è anche incernierato un estremo della seconda asta e all'altro estremo è attaccato un corpo puntiforme Q di massa m, collegato all'asse Ox da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla che si mantiene sempre verticale (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.



Usando come coordinate gli angoli φ, θ che le due aste formano con la direzione verticale determinare le configurazioni di equilibrio al variare del parametro

$$J = \frac{mg}{k\ell}.$$

Soluzioni

Primo Esercizio

1. La risultante delle forze di gravità è

$$\vec{\mathbf{R}}_g = -mg\hat{\mathbf{e}}_2$$

Sia $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\hat{\mathbf{e}}_2$, $\omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ la velocità angolare di rotazione del piano Oxy e $\lambda = \frac{m}{2\ell}$ la densità lineare di massa dell'asta. Per calcolare la risultante delle forze centrifughe facciamo il conto in coordinate nel riferimento $\Sigma = O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$. Le coordinate di un generico punto P dell'asta di ascissa r (contata lungo l'asta, a partire dal suo estremo A) sono date da

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_A + \boldsymbol{\chi}(\theta; r),$$

in cui $\mathbf{x}_A = 2\ell\mathbf{e}_1$ e

$$\boldsymbol{\chi}(\theta; r) = r(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2).$$

La risultante delle forze centrifughe è

$$\mathbf{R}_\omega = \int_0^{2\ell} \mathbf{f}(\theta; r)dr,$$

dove

$$\mathbf{f}(\theta; r) = -\lambda\omega^2\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{x}_A + \boldsymbol{\chi}(\theta; r))) = \frac{m}{2\ell}\omega^2(2\ell + r\sin\theta)\mathbf{e}_1.$$

Integrando si trova

$$\mathbf{R}_\omega = m\omega^2\ell(2 + \sin\theta)\mathbf{e}_1.$$

La risultante cercata è data dalla somma

$$\vec{\mathbf{R}}_g + \vec{\mathbf{R}}_\omega = m\omega^2\ell(2 + \sin\theta)\hat{\mathbf{e}}_1 - mg\hat{\mathbf{e}}_2.$$

2. Sappiamo che l'asse centrale passa per il baricentro B dell'asta, le cui coordinate sono date da

$$B - O = \ell(2 + \sin\theta)\hat{\mathbf{e}}_1 - \ell\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_2,$$

ed è parallelo a $\vec{\mathbf{R}}_g$. Poiché si ha

$$\vec{\mathbf{N}}_B^g = \vec{\mathbf{0}} \tag{1}$$

possiamo scegliere

$$\{\vec{\mathbf{R}}_g, B\}$$

come sistema di forze equivalente al sistema delle forze di gravità.[1] Mostriamo che vale (1) facendo il conto in coordinate. Posto $\mathbf{x}_B = \ell(2+\sin\theta)\mathbf{e}_1 - \ell\cos\theta\mathbf{e}_2$ si ha

$$\mathbf{N}_B^g = \int_0^{2\ell} (\boldsymbol{\chi}(\theta; r) + \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \times (-\lambda g\mathbf{e}_2)dr = -\lambda g\sin\theta \int_0^{2\ell} (r - \ell)dr\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

[1] Possiamo anche usare la relazione (1) per mostrare che l'asse centrale delle forze di gravità passa per il baricentro, infatti un punto Q_0 di questo asse soddisfa la relazione

$$Q_0 - B = \frac{1}{|\vec{\mathbf{R}}_g|^2}\vec{\mathbf{R}}_g \times \vec{\mathbf{N}}_B^g = \vec{\mathbf{0}}.$$

3. Possiamo determinare un punto Q_0 dell'asse centrale delle forze centrifughe tramite la formula

$$Q_0 - A = \frac{1}{|\vec{\mathbf{R}}_\omega|^2}\vec{\mathbf{R}}_\omega \times \vec{\mathbf{N}}_A^\omega \tag{2}$$

in cui

$$\vec{\mathbf{N}}_A^\omega = 4m\omega^2\ell^2\cos\theta\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin\theta\Big)\hat{\mathbf{e}}_3 \tag{3}$$

Dimostriamo la relazione precedente facendo il conto in coordinate:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_A^\omega &= \int_0^{2\ell}\boldsymbol{\chi}(\theta;r)\times\lambda\omega^2(2\ell+r\sin\theta)\mathbf{e}_1 = \int_0^{2\ell} r\cos\theta\lambda\omega^2(2\ell+r\sin\theta)dr\mathbf{e}_3\\ &= 4\ell^2 m\omega^2\cos\theta\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin\theta\Big)\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Dalle relazioni (2), (3) otteniamo

$$Q_0 - A = -\frac{2}{3}\frac{(3+2\sin\theta)}{(2+\sin\theta)}\ell\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_2.$$

L'asse centrale del sistema delle forze centrifughe è la retta parallela a $\vec{\mathbf{R}}_\omega$ che passa per Q_0.

Poiché il trinomio invariante $\vec{\mathbf{N}}_Q^\omega\cdot\vec{\mathbf{R}}_\omega$ è nullo ($\vec{\mathbf{N}}_Q^\omega$ è ortogonale al piano Oxy per ogni scelta del punto Q) possiamo considerare il sistema equivalente

$$\{\vec{\mathbf{R}}_\omega, Q\},$$

dove Q è un qualunque punto dell'asse centrale. Scegliamo Q tale che

$$Q - O = \big[2\ell + 2\ell\sin\theta G(\theta)\big]\hat{\mathbf{e}}_1 - 2\ell\cos\theta G(\theta)\hat{\mathbf{e}}_2,$$

dove

$$G(\theta) = \frac{1}{3}\frac{(3+2\sin\theta)}{(2+\sin\theta)}.$$

Osserviamo che il punto Q così scelto appartiene all'asta AC. Per dimostrarlo bisogna provare che $0\le G(\theta)\le 1$. Poiché

$$G'(\theta) = \frac{\cos\theta}{3(2+\sin\theta)^2},$$

i valori estremi di G sono raggiunti nei punti $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ e si trova che

$$G(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}, \qquad G(\frac{\pi}{2}) = \frac{5}{9},$$

per cui

$$0 < \frac{1}{3} \le G(\theta) \le \frac{5}{9} < 1.$$

Secondo Esercizio

1. Usando (s,θ) come coordinate ed indicando con B il baricentro dell'asta, si ha che

$$\begin{gathered}\mathbf{x}_A = s\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{x}}_A = \dot{s}\mathbf{e}_1,\\ \mathbf{x}_B = (s+\ell\sin\theta)\mathbf{e}_1 - \ell\cos\theta\mathbf{e}_2,\\ \dot{\mathbf{x}}_B = (\dot{s}+\ell\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{e}_1 + \ell\dot{\theta}\sin\theta\mathbf{e}_2,\\ \ddot{\mathbf{x}}_B = (\ddot{s}+\ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta)\mathbf{e}_1 + (\ell\ddot{\theta}\sin\theta+\ell\dot{\theta}^2\cos\theta)\mathbf{e}_2.\end{gathered}$$

La reazione vincolare nel punto A dell'asta è ortigonale all'asse Ox, per cui la prima equazione cardinale ha la forma

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{R}^{(E)} = -mg\mathbf{e}_2 - ks\mathbf{e}_1 + \Phi\mathbf{e}_2,$$

con $\Phi \in \mathbb{R}$ incognita. Proiettando lungo $\mathbf{e}_1$ si ottiene un'equazione pura:

$$m(\ddot{s} + \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta) = -ks.$$

La seconda equazione cardinale rispetto al polo A è data da

$$\dot{\mathbf{M}}_A = \mathbf{N}_A - \dot{\mathbf{x}}_A \times m\dot{\mathbf{x}}_B,$$

in cui possiamo calcolare il momento angolare usando la scomposizione

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B + m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \times \dot{\mathbf{x}}_B.$$

La velocità angolare dell'asta è data da $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_3$ e si ha

$$\mathbf{M}_B = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}\mathbf{e}_3,$$

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \times \dot{\mathbf{x}}_B &= m(\ell\sin\theta\mathbf{e}_1 - \ell\cos\theta\mathbf{e}_2) \times [(\dot{s} + \ell\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{e}_1 + \ell\dot{\theta}\sin\theta\mathbf{e}_2] \\ &= m(\ell^2\dot{\theta} + \ell\dot{s}\cos\theta)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \left(\frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta} + m\ell\dot{s}\cos\theta\right)\mathbf{e}_3, \\ \dot{\mathbf{M}}_A &= \left(\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell\ddot{s}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}\dot{s}\sin\theta\right)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Il momento risultante delle forze rispetto al polo A ed il secondo termine della parte destra della seconda equazione cardinale sono

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_A &= (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \times (-mg\mathbf{e}_2) = -mg\ell\sin\theta\mathbf{e}_3, \\ \dot{\mathbf{x}}_A \times m\dot{\mathbf{x}}_B &= m\ell\dot{s}\dot{\theta}\sin\theta\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione cardinale otteniamo una seconda equazione pura

$$\frac{4}{3}\ell\ddot{\theta} + \ddot{s}\cos\theta = -g\sin\theta.$$

2. Sapendo che l'energia cinetica di un corpo rigido è data da

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathcal{I}_B\boldsymbol{\omega},$$

dove $\mathcal{I}_B$ è la matrice di inerzia rispetto al polo B, risulta che

$$T = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\theta}^2.$$

L'energia potenziale è data dalla somma dell'energia potenziale gravitazionale e di quella elastica:

$$V = mgy_B + \frac{1}{2}ks^2 = -mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}ks^2.$$

La lagrangiana del sistema è

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + \frac{4}{3}\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta\right) + mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}ks^2.$$

Per scrivere le equazioni di Lagrange dobbiamo calcolare le derivate di L:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m(\dot{s} + \ell\dot{\theta}\cos\theta), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = m(\ddot{s} + \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta), \quad \frac{\partial L}{\partial s} = -ks$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta} + m\ell\dot{s}\cos\theta, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell\ddot{s}\cos\theta - m\ell\dot{s}\dot{\theta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\ell\dot{s}\dot{\theta}\sin\theta - mg\ell\sin\theta.$$

Ricordando che la forma delle equazioni di Lagrange è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{\partial L}{\partial s}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta},$$

sostituendo e semplificando si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} m(\ddot{s} + \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\sin\theta) &= -ks, \\ \frac{4}{3}\ell\ddot{\theta} + \ddot{s}\cos\theta &= -g\sin\theta, \end{aligned}$$

che sono le stesse trovate usando le equazioni cardinali.

Terzo Esercizio

Le ordinate dei punti P, Q sono

$$y_P = -\ell\cos\varphi, \qquad y_Q = -\ell(\cos\varphi + \cos\theta),$$

per cui l'energia potenziale del sistema è

$$V(\varphi, \theta) = -mg\ell(2\cos\varphi + \cos\theta) + \frac{1}{2}k\ell^2(\cos\varphi + \cos\theta)^2.$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti stazionari di V, cioè le soluzioni di

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = \ell\sin\varphi[2mg - k\ell(\cos\varphi + \cos\theta)] = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \ell\sin\theta[mg - k\ell(\cos\varphi + \cos\theta)] = 0 \end{cases} . \tag{4}$$

Posto $J = \frac{mg}{k\ell}$, le soluzioni di (4) sono le coppie (φ, θ) tali che

$$\sin\varphi = 0, \qquad \sin\theta = 0, \tag{5}$$

oppure

$$\sin\varphi = 0, \qquad J - (\cos\varphi + \cos\theta) = 0, \tag{6}$$

oppure

$$\sin\theta = 0, \qquad 2J - (\cos\varphi + \cos\theta) = 0. \tag{7}$$

Le soluzioni di (5) sono

$$(\varphi, \theta) = (0, 0),\ (0, \pi),\ (\pi, 0),\ (\pi, \pi). \tag{8}$$

Eliminando la variabile φ dal sistema (6) si ottengono le due equazioni

$$J - (\pm 1 + \cos\theta) = 0 \tag{9}$$

Poiché $J > 0$, la seconda equazione in (9), che si ottiene per $\varphi = \pi$, non ha soluzioni reali, e la prima equazione, che si ottiene per $\varphi = 0$, ha soluzioni reali solo se $0 < J < 2$. Analogamente, eliminando la variabile θ dal sistema (7), si ottengono le due equazioni

$$2J - (\cos\varphi \pm 1) = 0. \tag{10}$$

La seconda equazione in (10), che si ottiene per $\theta = \pi$, non ha soluzioni reali, e la prima equazione, che si ottiene per $\theta = 0$, ha soluzioni reali solo se $0 < J < 1$.

Concludiamo che il sistema meccanico ha le 4 configurazioni di equilibrio (8) se $J \geq 2$. Se $1 \leq J < 2$ a queste configurazioni si aggiungono i 2 equilibri

$$(\varphi, \theta) = (0, \pm\bar{\theta}), \qquad \bar{\theta} = \arccos(J - 1).$$

Se $0 < J < 1$ si aggiungono ai 6 equilibri precedenti anche

$$(\varphi, \theta) = (\pm\bar{\varphi}, 0), \qquad \bar{\varphi} = \arccos(2J - 1).$$