

Compito di Meccanica Razionale

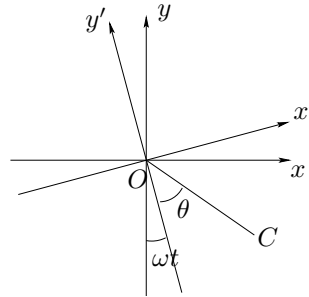
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

30 Gennaio 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri un altro riferimento $Ox'y'$, che ruota attorno all'origine O con velocità angolare costante. Nello stesso piano si può muovere un'asta AC di massa m e lunghezza 2ℓ , con l'estremo A incernierato nell'origine O . Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g . Usando come coordinata l'angolo θ che l'asta forma con la direzione di Oy'

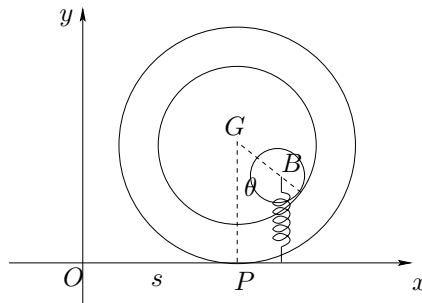


1. calcolare la risultante delle forze attive (gravità e forze apparenti) agenti sull'asta nel riferimento $Ox'y'$;
2. determinare un sistema di forze equivalente alle forze di gravità ed un sistema di forze equivalente alle forze apparenti in modo che ciascuno dei due sistemi equivalenti sia costituito da un'unica forza applicata ad un punto opportuno dell'asta;
3. determinare l'asse centrale relativo al sistema comprendente tutte le forze del punto 1.

Secondo Esercizio

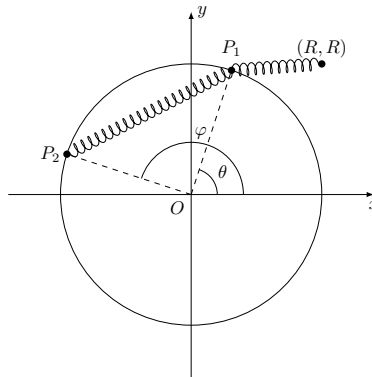
In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri una corona circolare omogenea, di massa M e raggi R_1, R_2 , con $R_1 < R_2$, che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox . Un disco omogeneo di massa $m = \frac{M}{2}$ e raggio $r < R_1$ può a sua volta rotolare senza strisciare all'interno della corona. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro B del disco all'asse Ox , mantenendosi sempre ad esso ortogonale. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g . Usando come coordinate l'ascissa s del baricentro G della corona e l'angolo θ che il segmento GB forma con la direzione verticale (vedi figura)

1. calcolare i momenti principali di inerzia della corona rispetto a G ;
2. scrivere l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere le equazioni di Lagrange.



Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1, P_2 di massa m , vincolati a scorrere su una circonferenza di centro O e raggio $R > 0$. I due punti sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il punto P_1 è inoltre collegato da un'altra molla, di caratteristiche uguali alla precedente, al punto di coordinate $(x, y) = (R, R)$. Usando come coordinate lagrangiane gli angoli θ, φ che i segmenti OP_1 e OP_2 formano con l'asse Ox ,



1. determinare le configurazioni di equilibrio del sistema;
2. studiare la stabilità delle configurazioni trovate.

Soluzioni

Primo Esercizio

1. Siano $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ i versori di Ox, Oy ed $\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2$ i versori di Ox', Oy' . Poniamo inoltre $\hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. Si ha

$$\vec{\mathbf{R}}_g = -mg\hat{\mathbf{e}}_2 = -mg(\sin\omega t\hat{\mathbf{e}}'_1 + \cos\omega t\hat{\mathbf{e}}'_2).$$

Indico con

$$\hat{\mathbf{e}}_C = \sin\theta\hat{\mathbf{e}}'_1 - \cos\theta\hat{\mathbf{e}}'_2$$

il versore dell'asta, orientato verso C . Posto $\lambda = m/(2\ell)$, la risultante delle forze apparenti $\vec{\mathbf{R}}_{app}$ è data dalla somma della risultante delle forze centrifughe $\vec{\mathbf{R}}_{centr}$ e della risultante delle forze di Coriolis $\vec{\mathbf{R}}_{Cor}$. Si ha

$$\vec{\mathbf{R}}_{centr} = \int_0^{2\ell} \vec{\mathbf{f}}_{centr}(\theta; r) dr = m\omega^2\ell\hat{\mathbf{e}}_C,$$

dove

$$\vec{\mathbf{f}}_{centr}(\theta; r) = -\lambda\omega\hat{\mathbf{e}}_3 \times (\omega\hat{\mathbf{e}}_3 \times r\hat{\mathbf{e}}_C) = \lambda\omega^2 r\hat{\mathbf{e}}_C \quad (1)$$

con r ascissa di un punto generico dell'asta. Inoltre

$$\vec{\mathbf{R}}_{Cor} = \int_0^{2\ell} \vec{\mathbf{f}}_{Cor}(\theta; r) dr = 2m\omega\dot{\theta}\ell\hat{\mathbf{e}}_C,$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{f}}_{Cor}(\theta; r) &= -2\lambda\omega\hat{\mathbf{e}}_3 \times \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{e}}_A) \Big|_{\Sigma'} \\ &= -2\lambda\omega\hat{\mathbf{e}}_3 \times \dot{\theta}(\cos\theta\hat{\mathbf{e}}'_1 + \sin\theta\hat{\mathbf{e}}'_2) = 2\lambda\omega\dot{\theta}r\hat{\mathbf{e}}_C, \end{aligned} \quad (2)$$

in cui $\Sigma' = O\hat{\mathbf{e}}'_3\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$. Quindi la risultante delle forze attive è

$$\vec{\mathbf{R}} = m[-g\sin\omega t + \omega(\omega + 2\dot{\theta})\ell\sin\theta]\hat{\mathbf{e}}'_1 - m[g\cos\omega t + \omega(\omega + 2\dot{\theta})\ell\cos\theta]\hat{\mathbf{e}}'_2.$$

2. Sia B il baricentro dell'asta. Usando B come polo, il momento risultante della forza di gravità ed il momento risultante delle forze apparenti sono nulli. In particolare, per dimostrare la seconda affermazione basta osservare che per le relazioni (1),(2) le forze apparenti agenti su ogni elemento materiale dell'asta sono dirette lungo l'asta stessa, per cui l'asse centrale delle forze apparenti è la retta che contiene l'asta. Concludiamo che possiamo usare come sistemi di forze equivalenti

$$\{(\vec{\mathbf{R}}_g, B)\} \quad \text{e} \quad \{(\vec{\mathbf{R}}_{app}, P)\},$$

Dove P è un qualunque punto dell'asta ed $\vec{\mathbf{R}}_{app} = \vec{\mathbf{R}}_{centr} + \vec{\mathbf{R}}_{Cor}$. Osserviamo che possiamo scegliere in particolare $P = B$.

3. Scelto un punto Q nel piano, la formula

$$Q_0 - Q = \frac{\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{N}}_Q}{|\vec{\mathbf{R}}|^2},$$

dove $\vec{\mathbf{N}}_Q$ è il momento risultante delle forze attive rispetto a Q , determina un punto Q_0 dell'asse centrale sulla retta passante per Q e ortogonale a $\vec{\mathbf{R}}$. Se

scegliamo $Q = B$ si trova $\vec{N}_Q = \vec{0}$, come si vede subito usando il sistema equivalente

$$\{(\vec{R}, B)\}.$$

Si trova quindi $Q_0 = B$ e si ottiene che l'asse centrale è la retta passante per il baricentro B e parallela ad \vec{R} .

Secondo Esercizio

1. Un riferimento principale di inerzia è dato da $G\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$. Poichè il corpo è nel piano Gxy ed è simmetrico per rotazione attorno a $G\hat{e}_3$ i momenti principali di inerzia soddisfano le relazioni

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3.$$

Basta quindi calcolare I_3 , che si può ottenere dalla differenza

$$I_3^{D_2} - I_3^{D_1}$$

tra i momenti principali rispetto a $B\hat{e}_3$ di due dischi omogenei di raggi R_2 ed R_1 . La densità di massa della corona è

$$\sigma = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)},$$

per cui le masse di questi dischi sono

$$M_{D_1} = \sigma\pi R_1^2 = \frac{MR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad M_{D_2} = \sigma\pi R_2^2 = \frac{MR_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Si ottiene quindi

$$I_3 = \frac{1}{2}(M_{D_2}R_2^2 - M_{D_1}R_1^2) = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2),$$

e

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}M(R_1^2 + R_2^2).$$

2. La velocità angolare della corona è

$$\vec{\omega}_c = -\frac{\dot{s}}{R}\mathbf{e}_3.$$

La velocità angolare del disco è

$$\vec{\omega}_d = -\frac{1}{r}\left[\dot{s}\frac{R_1}{R_2} + \dot{\theta}(R_1 - r)\right].$$

L'energia cinetica risulta

$$T = m\left[2 + \frac{3}{4}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]\dot{s}^2 + m(R_1 - r)\left[\cos\theta + \frac{R_1}{2R_2}\right]\dot{s}\dot{\theta} + m\frac{3}{4}(R_1 - r)^2\dot{\theta}^2.$$

3. L'energia potenziale delle forze attive è

$$V = mg[R_2 - (R_1 - r)\cos\theta] + \frac{1}{2}k[R_2 - (R_1 - r)\cos\theta]^2.$$

Sia $L = T - V$ la lagrangiana. Poniamo

$$A = 2 + \frac{3}{4} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2, \quad B(\theta) = (R_1 - r) \left[\cos \theta + \frac{R_1}{2R_2} \right], \quad C = \frac{3}{4} (R_1 - r)^2.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m[B(\theta)\dot{s} + 2C\dot{\theta}] \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mB'(\theta)\dot{s}\dot{\theta} - (mg + k[R_2 - (R_1 - r)\cos\theta])(R_1 - r)\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= m[2A\dot{s} + B(\theta)\dot{\theta}] \\ \frac{\partial L}{\partial s} &= 0 \end{aligned}$$

per cui le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned} m[B(\theta)\ddot{s} + 2C\ddot{\theta}] + (mg + k[R_2 - (R_1 - r)\cos\theta])(R_1 - r)\sin\theta &= 0 \\ m[2A\ddot{s} + B'(\theta)\dot{\theta}^2 + B(\theta)\ddot{\theta}] &= 0 \end{aligned}$$

Terzo Esercizio

1. Le coordinate dei punti P_1, P_2 sono date da

$$P_1 - O = R(\cos\theta\hat{e}_1 + \sin\theta\hat{e}_2), \quad P_2 - O = R(\cos\varphi\hat{e}_1 + \sin\varphi\hat{e}_2).$$

L'energia potenziale è data dalla somma dell'energia potenziale elastica delle due molle:

$$V = -kR^2 \cos(\theta - \varphi) + \frac{kR^2}{2} [(\cos\theta - 1)^2 + (\sin\theta - 1)^2].$$

Le derivate parziali di V sono

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta} = kR^2[\sin(\theta - \varphi) + \sin\theta - \cos\theta], \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -kR^2 \sin(\theta - \varphi). \end{cases}$$

Imponendo che queste derivate siano entrambe nulle, dalla seconda equazione si ha che

$$\theta - \varphi = 0, \pi.$$

Sostituendo nella prima equazione, si ottiene l'equazione

$$\sin\theta - \cos\theta = 0,$$

che ha soluzioni

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

in $[0, 2\pi)$. Usando la relazione che lega θ a φ , si ottiene che le configurazioni di equilibrio in $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ sono

$$(\theta, \varphi) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right).$$

2. Per studiare la stabilità degli equilibri calcoliamo le derivate seconde di V :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &= kR^2[\cos(\theta - \varphi) + \cos \theta + \sin \theta], \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} &= kR^2 \cos(\theta - \varphi), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} &= -kR^2 \cos(\theta - \varphi).\end{aligned}$$

Le matrici hessiane nelle configurazioni di equilibrio sono

$$\begin{aligned}V''\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= kR^2 \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ V''\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) &= kR^2 \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ V''\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) &= kR^2 \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ V''\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= kR^2 \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La prima matrice ha traccia e determinante positivi. L'equilibrio $(\theta, \varphi) = (\pi/4, \pi/4)$ risulta quindi stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet. La seconda matrice ha determinante negativo, mentre la terza e la quarta hanno traccia negativa. Come conseguenza, V'' in queste 3 configurazioni ha un autovalore negativo, quindi tali equilibri sono instabili.