# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

## 11 Settembre 2018

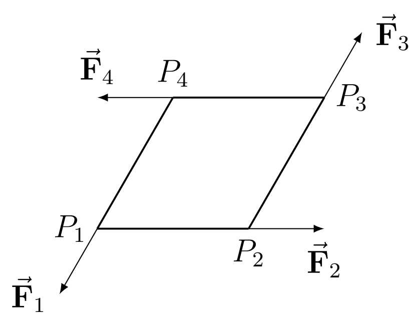
### (usare fogli diversi per esercizi diversi)

### Primo Esercizio

i) Sia $\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_i, P_i)\}_{i=1,\ldots,N}$ un sistema di forze applicate, con $N \geq 2$, e siano $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ due sottoinsiemi disgiunti di $\mathcal{F}$ tali che la loro unione $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ sia uguale a $\mathcal{F}$.[1] Mostrare che se $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ sono sistemi di forze applicate equivalenti a $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ rispettivamente allora il sistema $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ è equivalente a $\mathcal{F}$.

ii) Dato un sistema piano di forze applicate non parallele $\{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1), (\vec{\mathbf{F}}_2, P_2)\}$ mostrare che questo è sempre equivalente al sistema composto da un'unica forza applicata nel punto dove si intersecano le linee di azione di $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2$.

Si consideri una lamina a forma di rombo, con lati di lunghezza $\ell$ e rapporto fra le diagonali uguale a $\sqrt{3}$. Ai vertici $P_1, P_2, P_3, P_4$ della lamina sono applicate le forze $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \vec{\mathbf{F}}_3, \vec{\mathbf{F}}_4$, di uguale intensità $F > 0$ e ciascuna parallela a uno dei due lati che contiene il loro punto di applicazione nel modo indicato in figura:




a) Mostrare che in questo caso non è possibile trovare un sistema di forze equivalente composto da un'unica forza applicata ad un punto opportuno.

b) Trovare un sistema di forze equivalente composto da una coppia di forze.

### Secondo Esercizio

Un corpo di massa $m$ è soggetto ad una forza centrale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,$$

[1] ad esempio, possiamo scegliere $\mathcal{F}_1 = \{(\vec{\mathbf{F}}_h, P_h)\}_{h=1,\ldots,n}, \mathcal{F}_2 = \{(\vec{\mathbf{F}}_k, P_k)\}_{k=(n+1),\ldots,N}$, con $1 \leq n < N$

dove $\rho = |\boldsymbol{x}|$ ed

$$f(\rho) = -\rho e^{-\rho^2}.$$

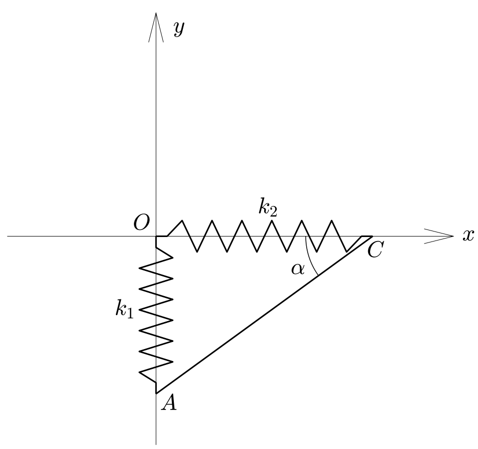
Assumendo che il momento angolare sia non nullo,

a) scrivere l'equazione implicita che definisce il raggio delle orbite circolari;

b) discutere il numero di orbite circolari al variare del valore della componente $c$ del momento angolare ortogonale al piano del moto. Qual è il valore massimo di $|c|$ per cui ne è garantita l'esistenza?

### Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxy$, con asse $Oy$ verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea di massa $m$, lunghezza $\ell$ ed estremi $A$, $C$ che scivolano senza strisciare rispettivamente lungo gli assi $Oy$, $Ox$. Una molla di costante elastica $k_1 > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega $A$ con $O$ ed un'altra molla di costante elastica $k_2 > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega $C$ con $O$. Si usi come coordinata l'angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ che l'asta $AC$ forma con l'asse $Ox$ (vedi figura).




Si assuma che $k_1 = 2k_2$.

a) Calcolare la componente lagrangiana delle forze attive $Q_\alpha$ e usarla per scrivere l'equazione che caratterizza le configurazioni di equilibrio del sistema.

b) Ritrovare la condizione dell'equilibrio del punto precedente tramite l'energia potenziale delle forze attive.

c) Studiare la stabilità degli equilibri trovati.

d) Scrivere l'equazione del moto dell'asta.

Si assuma che $k_1 = k_2$.

e) Calcolare le reazioni vincolari esercitate sull'asta in $A$ ed in $C$ durante il moto.