

Compito di Meccanica Razionale

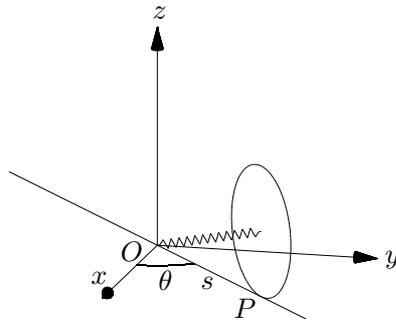
Corso di Laurea in Matematica

7 Settembre 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Un'asta omogenea AC di massa m e lunghezza ℓ ha il baricentro incernierato in O ed è libera di ruotare sul piano (x, y) . Un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare sulla guida, mantenendosi verticale. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro del disco con il punto O .



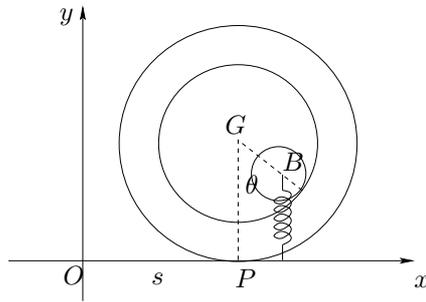
Usando come coordinate l'angolo θ tra OC ed Ox , e l'ascissa s del punto di contatto P tra disco e asta, contata a partire da O e crescente verso C (vedi figura)

1. determinare la lagrangiana ridotta del sistema;
2. disegnare il ritratto in fase nel piano delle fasi ridotto al variare dei parametri m, M, ℓ, R, k .

Secondo Esercizio

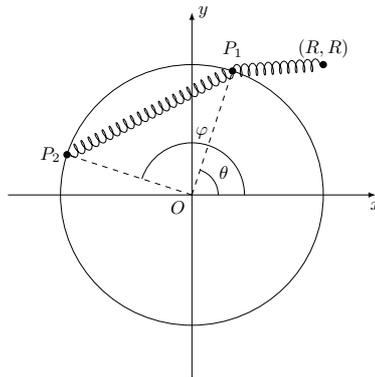
In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri una corona circolare omogenea, di massa M e raggi R_1, R_2 , con $R_1 < R_2$, che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox . Un disco omogeneo di massa m e raggio $r < R_1$ può a sua volta rotolare senza strisciare all'interno della corona. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro B del disco all'asse Ox , mantenendosi sempre ad esso ortogonale. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g . Usando come coordinate l'ascissa s del baricentro G della corona e l'angolo θ che il segmento GB forma con la direzione verticale (vedi figura)

1. calcolare i momenti principali di inerzia della corona rispetto a G ;
2. scrivere l'energia cinetica del sistema;
3. scrivere le equazioni di Lagrange.



Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1, P_2 di massa m , vincolati a scorrere su una circonferenza di centro O e raggio $R > 0$. I due punti sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il punto P_1 è inoltre collegato da un'altra molla, di caratteristiche uguali alla precedente, al punto di coordinate $(x, y) = (R, R)$. Usando come coordinate lagrangiane gli angoli θ, φ che i segmenti OP_1 e OP_2 formano con l'asse Ox ,



1. determinare le configurazioni di equilibrio del sistema;
2. studiare la stabilità delle configurazioni trovate.