Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

8 Giugno 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\epsilon\, x - (1-\epsilon) y}{x^2+y^2} \\ \\ \ddot{y} = -\frac{(1-\epsilon)\, x + \epsilon\, y}{x^2+y^2} \end{cases} \tag{*}$$

con $\epsilon \in \{0, 1\}$, per $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

i) Dire in quale dei due casi per ϵ il sistema rappresenta le equazioni di Eulero-Lagrange per una lagrangiana di tipo meccanico, ossia $L = T - V$ con $T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ energia cinetica e $V(x, y)$ energia potenziale;

ii) trovare due integrali primi per il sistema (*) nel caso lagrangiano;

iii) scrivere la funzione di Hamilton H associata al sistema nel caso lagrangiano, e usarla per studiare qualitativamente la soluzione con condizioni iniziali $x(0) = y(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 1$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione regolare di tre variabili reali x, y, z. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = f\big((p_1 + q_2)^2 + q_1^2, p_2 + q_1, q_2\big),$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in (\mathbb{R}^+)^2, \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

i) trovare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$$

tale che le nuove variabili $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la Hamiltoniana $K = H \circ \Psi^{-1}$.

Si consideri adesso il caso particolare in cui

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x + yz. \tag{1}$$

ii) Trovare le soluzioni del sistema hamiltoniano per H in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$p_1(0) = -1,\ p_2(0) = 0,\ q_1(0) = 1,\ q_2(0) = 1.$$

iii) Calcolare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata a $K = H \circ \Psi^{-1}$.

Esercizio 3. Si consideri la hamiltoniana

$$H_\epsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}), \qquad \mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3,$$

dove $\boldsymbol{\omega} = (1, 1, 1)$ ed

$$h(\mathbf{I}) = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}, \qquad f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = I_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + I_2 \sin^2(\varphi_1 + \varphi_3).$$

1. Si trovi la forma normale risonante $\tilde{H}_\epsilon$ di H_ϵ relativa alla risonanza singola definita da $\mathbf{k} = (0, 1, -1)$.

2. Si consideri la hamiltoniana K_ϵ ottenuta da $\tilde{H}_\epsilon$ trascurando i termini $O(\epsilon^2)$ e si dimostri che essa definisce un sistema hamiltoniano integrabile trovando tre integrali primi in involuzione e genericamente indipendenti.