Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
3 Luglio 2018
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri la lagrangiana

$$L(t,q,\dot q) = \frac{1}{2}\, e^{2kt} \left(\dot q^2 - q^2\right)\,, \qquad q, \dot q \in \mathbb{R}$$

con $k \in (0,1)$.

i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L tale che $\bar\gamma(0) = 1$ e $\dot{\bar\gamma}(0) = -k$.

ii) Calcolare l'estremo superiore dei tempi $t_1 > 0$ tale che $\bar\gamma(t)$ è un minimo debole stretto dell'azione lagrangiana $\mathcal{A}_L$ nell'insieme delle funzioni $C^1([0,t_1],\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\, p_1^2 + \frac{1}{2}\,\frac{p_2^2(1+q_2^2)}{q_1^2} - \frac{q_2}{q_1}\, p_1 p_2 - \cos(q_1\, q_2)$$

con $\mathbf{p} = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{q} = (q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2$ tali che $q_1 > 0$.

i) Estendere le relazioni

$$Q_1 = q_1 q_2\,, \qquad Q_2 = q_1$$

ad una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \overset{\mathbf{\Psi}}{\to} (\mathbf{P},\mathbf{Q})$$

sul dominio di $H(\mathbf{p},\mathbf{q})$.

ii) Trovare l'espressione per la funzione $K(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ il cui campo vettoriale hamiltoniano X_K è coniugato tramite $\mathbf{\Psi}^{-1}$ al campo hamiltoniano X_H. Usare l'espressione di $K(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ e di $\mathbf{\Psi}$ per trovare due integrali primi per il campo vettoriale hamiltoniano X_H.

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}), \qquad \mathbf{I} = (I_1,I_2) \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{T}^2,$$

dove

$$h(\mathbf{I}) = \frac{1}{2}|\mathbf{I}|^2, \qquad f(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}) = |\boldsymbol{I}|^2(\cos\varphi_1)^2\cos\varphi_2.$$

Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I},\boldsymbol{\varphi}) \overset{\mathbf{\Psi}}{\mapsto} (\tilde{\mathbf{I}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana del sistema nelle variabili $(\tilde{\mathbf{I}},\tilde{\boldsymbol{\varphi}})$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ.