Primo compitino di Istituzioni di Fisica Matematica
28 Novembre 2017
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -4x + 3\sin t, \tag{1}$$

con $x, t \in \mathbb{R}$.

i) Trovare una lagrangiana L che ha (1) come equazione di Eulero-Lagrange.

ii) Trovare la soluzione $t \mapsto \gamma(t)$ di (1) con condizioni iniziali $\gamma(0) = 1$, $\dot{\gamma}(0) = 0$ e scrivere l'equazione di Jacobi corrispondente a L e γ.

iii) Trovare il primo punto (t_*, x_*) coniugato a $(t, x) = (0, 1)$ su γ che si presenta per $t > 0$.

iv) Calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t, x)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t, \alpha) : t \in (0, t_*), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni di (1) con condizioni iniziali $\gamma_\alpha(0) = 0$, $\dot{\gamma}_\alpha(0) = \alpha$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{(p_1 + p_2)^2}{(q_1 + q_2)^2} - \frac{1}{4}(q_1 - q_2)^3$$

con $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ tali che $q_1 + q_2 > 0$.

i) Si dimostri che la funzione

$$F(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}$$

è un integrale primo per il campo vettoriale hamiltoniano X_H.

ii) Mostrare che la funzione

$$S(q_1, q_2, P_1, P_2) = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)\,P_1 + \frac{1}{4}(q_1 + q_2)^2\,P_2$$

genera una trasformazione canonica univalente $\boldsymbol{\Psi} : (p_1, p_2, q_1, q_2) \to (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$ sul dominio della funzione H, e scrivere la trasformazione $\boldsymbol{\Psi}$ esplicitamente.

iii) Trovare il campo vettoriale hamiltoniano X_K coniugato a X_H tramite $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$, e usarlo per trovare la soluzione per $t \geq 1$ delle equazioni di Hamilton associate ad H con condizioni iniziali $p_1(1) = -1$, $p_2(1) = 1$, $q_1(1) = \frac{3}{2}$, $q_2(1) = -\frac{1}{2}$.