

LEZIONI DI
MECCANICA RAZIONALE

Giovanni Federico Gronchi

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

12 dicembre 2016

Indice

I	Meccanica newtoniana	11
1	Sistemi meccanici discreti non vincolati	13
1.1	Spazio, tempo e sistemi di riferimento	13
1.2	Descrizione del moto	16
1.3	Le equazioni del moto	17
1.4	I riferimenti inerziali	18
1.5	Sistemi meccanici	20
1.6	Dinamica di un punto materiale P	21
1.7	Equazioni di bilancio e leggi di conservazione	22
2	Sistemi di riferimento in moto relativo	25
2.1	Velocità angolare e formule di Poisson	25
3	Moti centrali	31
3.1	Integrabilità dei moti centrali	32
3.2	Legge delle aree	34
3.3	Formula di Binet	35
3.4	Traiettoria del moto	35
3.5	Il problema dei 2 corpi	38
3.6	Il problema di Keplero	39
3.6.1	Problema diretto	40
3.6.2	Il vettore di Laplace-Lenz	42
3.6.3	Problema inverso	44
3.7	Teorema di Bertrand	44
4	Dinamica dei sistemi di N punti materiali	51
4.1	Teoremi di scomposizione relativi al baricentro	52
4.2	Forze interne e forze esterne	55
4.3	Le equazioni cardinali	56
4.4	Sistemi di forze equivalenti	56
4.5	Sistemi conservativi	57

4.6	Similitudine meccanica	60
4.7	Alcuni risultati sul problema degli N corpi	63
5	Il corpo rigido	65
5.1	Corpi rigidi discreti	65
5.2	Proprietà cinematiche di un corpo rigido	68
5.2.1	Formula fondamentale della cinematica rigida	68
5.2.2	Campo delle velocità di un moto rigido	69
5.2.3	Moti rigidi piani	71
5.2.4	Operatore di inerzia	71
5.3	Proprietà dinamiche di un corpo rigido	75
5.4	Corpi rigidi continui	76
5.5	Esempi di matrici principali di inerzia	79
5.6	Equazioni cardinali e moti rigidi	79
5.7	Conservazione dell'energia ed equazioni del moto	82
5.8	Equazioni di Eulero per il corpo rigido con un punto fisso	83
5.9	Moto per inerzia (Euler-Poinsot)	84
5.9.1	Fase geometrica nel moto del corpo rigido	90
II	Meccanica lagrangiana	91
6	Sistemi vincolati	93
6.1	Varietà differenziabili e spazi tangenti in \mathbb{R}^m	94
6.2	Vincoli olonomi	95
6.3	Vincoli anolonomi	97
6.4	Lo studio del moto vincolato	97
6.5	Vincoli ideali e principio di D'Alembert	99
7	Equazioni di Lagrange	103
7.1	Forze conservative e lagrangiana	106
7.2	Lagrangiane equivalenti	107
7.3	Invarianza delle equazioni di Lagrange	109
7.4	Energia potenziale generalizzata	111
8	Simmetrie e integrali primi	117
8.1	Variabili cicliche	117
8.1.1	Riduzione di Routh	118
8.2	Teorema di Noether	121

9	Equilibri e stabilità	127
9.1	Linearizzazione attorno a un equilibrio	128
9.2	Il teorema di Lagrange-Dirichlet	130
9.3	Analisi della stabilità dei sistemi lagrangiani	131
9.4	Stabilizzazione con termini girostatici	131
9.5	Piccole oscillazioni attorno a un equilibrio stabile	133
9.6	Alcuni esempi	133
9.7	Diagonalizzazione simultanea di forme quadratiche	136
9.8	Equilibri relativi nel problema dei 3 corpi ristretto circolare piano .	137
10	Angoli di Eulero e moto di un corpo rigido	139
10.1	La trottola di Lagrange	141
III	Esercizi	143
11	Esercizi	145
11.1	Cinematica ed equazioni cardinali	145
11.2	Equazioni di Eulero per il corpo rigido	151
11.3	Forze apparenti	152
11.4	Sistemi lagrangiani	154
INDICE ANALITICO		165

Parte I
Meccanica newtoniana

Capitolo 1

Sistemi meccanici discreti non vincolati

Vogliamo descrivere il moto di un sistema di punti materiali $P_1 \dots P_N$ dotati di masse $m_1 \dots m_N$, soggetti a forze esterne assegnate, che si possono muovere liberamente nello spazio ambiente.

1.1 Spazio, tempo e sistemi di riferimento

Il tempo t è reale e unidimensionale; lo spazio ambiente è euclideo tridimensionale e lo denotiamo con \mathbb{E}^3 .

\mathbb{E}^3 è dunque uno spazio affine reale a cui è associato uno spazio vettoriale \mathbb{V}^3 dotato di un prodotto scalare, che denotiamo con \cdot , cioè di una forma bilineare simmetrica definita positiva $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Possiamo quindi introdurre la norma

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}, \quad \vec{u} \in \mathbb{V}^3$$

e la distanza

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} - \vec{v}|, \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}^3.$$

Introduciamo anche lo spazio prodotto $\mathbb{G} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$, che chiamiamo spazio-tempo di Galileo. Gli elementi di \mathbb{G} si chiamano eventi. Inoltre \mathbb{G} ha la struttura di un fibrato banale, avente per base la retta del tempo \mathbb{R} , mentre le fibre sono gli spazi degli eventi simultanei $\mathbb{E}^3 \times \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$, tutti isomorfi a \mathbb{E}^3 . La struttura euclidea su \mathbb{E}^3 permette di misurare le distanze tra eventi simultanei usando questo isomorfismo.

Prodotto vettoriale

Introduciamo un prodotto vettoriale (o prodotto vettore) su \mathbb{V}^3 , denotato con \times , che è un'applicazione $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ bilineare, antisimmetrica, tale che

- i) se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ allora $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$,
- ii) $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$,

per ogni $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$.

Dimostriamo che sullo spazio \mathbb{V}^3 , dotato del prodotto scalare \cdot , esistono 2 prodotti vettoriali \times_1, \times_2 , il cui risultato differisce solo per il segno e, scelta una base ortonormale $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, risulta

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \times_1 \hat{e}_2 &= \hat{e}_3, & \hat{e}_2 \times_1 \hat{e}_3 &= \hat{e}_1, & \hat{e}_3 \times_1 \hat{e}_1 &= \hat{e}_2, \\ \hat{e}_1 \times_2 \hat{e}_2 &= -\hat{e}_3, & \hat{e}_2 \times_2 \hat{e}_3 &= -\hat{e}_1, & \hat{e}_3 \times_2 \hat{e}_1 &= -\hat{e}_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Osserviamo innanzitutto che le due applicazioni bilineari e antisimmetriche \times_1, \times_2 definite dalle (1.1) soddisfano le proprietà i), ii).

Esercizio 1. *Verificare l'affermazione precedente.*

Consideriamo adesso un'applicazione $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ bilineare e antisimmetrica con le proprietà i), ii) del prodotto vettore elencate sopra. Allora, data una base ortonormale $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ di \mathbb{V}^3 , dalla proprietà antisimmetrica abbiamo

$$\hat{e}_j \times \hat{e}_j = \vec{0}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Dalle i), ii) segue che $|\hat{e}_1 \times \hat{e}_2| = 1$ e che $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2$ sta in $\hat{e}_1^\perp \cap \hat{e}_2^\perp = \text{span}(\hat{e}_3)$, quindi

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \pm \hat{e}_3.$$

Inoltre, se $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = +\hat{e}_3$, si ha anche

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2. \quad (1.2)$$

Infatti, ragionando come prima si ottiene $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \pm \hat{e}_1$ e, se valesse $\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_1$, usando ii) avremmo la seguente contraddizione:

$$-1 = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 1.$$

La seconda equazione in (1.2) si dimostra in modo simile. Procedendo in modo analogo si ottiene che se invece vale $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_3$ si ha

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_2.$$

Scelto uno dei due prodotti vettoriali su \mathbb{V}^3 , che indichiamo con \times , diciamo che una terna ordinata di vettori ortonormali $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ è levogira rispetto a \times se vale

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2.$$

Nel seguito considereremo solo terne levogire.

Vale la seguente proprietà (formula del prodotto triplo):

$$(\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}) \times \vec{\mathbf{z}} = (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{z}}) \vec{\mathbf{y}} - (\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{z}}) \vec{\mathbf{x}}. \quad (1.3)$$

Esercizio 2. Verificare la (1.3).

Notiamo che il prodotto vettoriale non è associativo, infatti dalla formula del prodotto triplo e dalla proprietà antisimmetrica otteniamo

$$(\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}) \times \vec{\mathbf{z}} - \vec{\mathbf{x}} \times (\vec{\mathbf{y}} \times \vec{\mathbf{z}}) = (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}}) \vec{\mathbf{z}} - (\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{z}}) \vec{\mathbf{x}}$$

che in generale è non nullo.

Introduciamo in \mathbb{R}^3 il prodotto scalare

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{h=1}^3 x_h y_h, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

La mappa

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3,$$

con $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$, definisce un prodotto vettore su \mathbb{R}^3 e la terna $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è levogira.

Sistemi di riferimento

La descrizione del moto di un corpo richiede l'introduzione di un sistema di riferimento, che permetta di individuare la posizione del corpo nello spazio ambiente in cui avviene il moto.

Un sistema di riferimento in \mathbb{E}^3 è una mappa differenziabile¹

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \Sigma(t) = \{O(t), \hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t)\} \in \mathbb{E}^3 \times (\mathbb{V}^3)^3,$$

con $O \in \mathbb{E}^3$, $\hat{\mathbf{e}}_j \in \mathbb{V}^3$, $j = 1, 2, 3$, tale che

$$\hat{\mathbf{e}}_i(t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j(t) = \delta_{ij} \quad \forall i, j, \forall t.$$

Inoltre assumiamo che i vettori $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ formino una terna levogira. Per un sistema di riferimento Σ useremo anche la notazione $O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$, oppure $Oxyz$.

¹Una mappa $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{V}^3$ è differenziabile se lo è una sua qualunque rappresentazione in coordinate $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ che si ottiene scegliendo una base (i cui vettori indipendenti da t). Una mappa $\mathbb{R} \ni t \mapsto P(t) \in \mathbb{E}^3$ è differenziabile se lo è la mappa $\mathbb{R} \ni t \mapsto P(t) - O \in \mathbb{E}^3$, dove O è un qualunque punto di \mathbb{E}^3 .

Rappresentazione in coordinate

Dato $P \in \mathbb{E}^3$ ed un sistema di riferimento $O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$, possiamo associare in modo unico a tale punto un vettore di coordinate in \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{E}^3 \ni P \longleftrightarrow \vec{\mathbf{x}}_P = P - O = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\mathbf{e}}_i \in \mathbb{V}^3 \longleftrightarrow \mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad (1.4)$$

Denoteremo con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i vettori della base canonica di \mathbb{R}^3 , corrispondenti a $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. In seguito, nella scrittura delle formule, utilizzeremo sia la notazione in \mathbb{V}^3 che quella in coordinate in \mathbb{R}^3 .

Fissato un sistema di riferimento in \mathbb{E}^3 possiamo identificare $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$ con lo spazio delle coordinate di Galileo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

1.2 Descrizione del moto

Il moto di un punto $P \in \mathbb{E}^3$ è una mappa differenziabile

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto P(t) \in \mathbb{E}^3.$$

Dato un sistema di riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$, possiamo definire la posizione, la velocità e l'accelerazione di P relativamente a Σ rispettivamente come

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}_P &= (P - O) = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\mathbf{e}}_i, \\ \vec{\mathbf{v}}_P &= \left. \frac{d}{dt}(P - O) \right|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{\mathbf{e}}_i, \\ \vec{\mathbf{a}}_P &= \left. \frac{d^2}{dt^2}(P - O) \right|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \hat{\mathbf{e}}_i \end{aligned}$$

e possiamo identificarle tramite la (1.4) con i rispettivi vettori delle loro coordinate in \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_P = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad \mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{x}}_P = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) \in \mathbb{R}^3.$$

L'operazione di derivata temporale di una mappa vettoriale dipende dalla base in cui si scrivono le componenti e quindi, per i sistemi meccanici, dalla scelta del riferimento. Utilizzeremo la notazione $\left. \frac{d}{dt}(\cdot) \right|_{\Sigma}$ per indicare esplicitamente tale dipendenza.

1.3 Le equazioni del moto

Le forze

Dato un sistema di N punti materiali e fissato un riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ assumiamo che la forza agente sul punto P_i sia esprimibile da una mappa²

$$\vec{\mathbf{F}}_i : (\mathbb{V}^3)^N \times (\mathbb{V}^3)^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^3$$

che dipende solo dalla posizione e dalla velocità dei punti del sistema e dal tempo t , quindi

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N, \vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N, t).$$

Questa si può anche considerare come una mappa da $(\mathbb{R}^3)^N \times (\mathbb{R}^3)^N \times \mathbb{R}$ a \mathbb{R}^3 , denotata con

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t),$$

utilizzando l'isomorfismo tra \mathbb{V}^3 ed \mathbb{R}^3 definito dal sistema di riferimento scelto.

Vale il principio di sovrapposizione, cioè i contributi di due forze agenti su uno stesso punto si sommano vettorialmente.

Osserviamo che le forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ dipendono dal sistema di riferimento scelto, vedi Sezione 2.

Il determinismo di Laplace e le equazioni di Newton

Il principio del determinismo meccanicistico dice che la conoscenza dello stato cinetico (posizioni e velocità) di un sistema di N punti materiali ad un certo istante permette di determinare tutta la sua evoluzione temporale.

Dato un sistema formato dai punti $P_i, i = 1 \dots N$, soggetti alle forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ nel sistema di riferimento Σ , assumiamo che valgano le equazioni di Newton (*secondo principio della Dinamica*). Più precisamente, siano

$$\vec{\mathbf{x}} = (\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N), \quad \vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N), \in (\mathbb{V}^3)^N$$

i vettori delle posizioni e velocità degli N punti. Se

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{v}}, t)$$

è la forza agente sul punto $P_i, i = 1 \dots N$, allora si assume che il moto $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ sia soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{\mathbf{x}}_i \Big|_{\Sigma} = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{v}}, t) \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.5)$$

²questa si può anche considerare come mappa da $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}$ a \mathbb{V}^3 , oppure come mappa da $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}$ a \mathbb{R}^3 utilizzando l'isomorfismo $\mathbb{V}^3 \approx \mathbb{R}^3$.

oppure, in coordinate in \mathbb{R}^3 ,

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.6)$$

1.4 I riferimenti inerziali

Trasformazioni galileiane

Fissato un sistema di riferimento, chiamiamo gruppo di Galileo il gruppo \mathcal{G} delle trasformazioni affini dello spazio delle coordinate di Galileo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ che conservano gli intervalli di tempo (con la loro orientazione) e la distanza tra eventi simultanei.

Proposizione 1. *Ogni elemento $g \in \mathcal{G}$ si scrive in modo unico come prodotto di trasformazioni del tipo seguente:*

$$i) \quad g_1(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + t\mathbf{u}, t) \quad (\text{moto uniforme con velocità } \mathbf{u})$$

$$ii) \quad g_2(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s) \quad (\text{traslazione dell'origine})$$

$$iii) \quad g_3(\mathbf{x}, t) = (G\mathbf{x}, t) \quad (\text{isometria spaziale})$$

con $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, t, s \in \mathbb{R}, G \in O(3)$.

Dimostrazione. Osserviamo che le trasformazioni della forma g_1, g_2, g_3 stanno in \mathcal{G} . Consideriamo adesso una generica trasformazione affine Φ di $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ in sé:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} A \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} + \mathbf{B},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} G & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ s \end{pmatrix}, \quad G \in \mathcal{M}(3, 3), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad a, s \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo che se Φ è una trasformazione del gruppo \mathcal{G} si ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}, a = 1, G \in O(3)$. Da questo seguirà la tesi. L'invarianza degli intervalli di tempo ci dice che

$$|\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + a(t_1 - t_2)| = |t_1 - t_2|$$

per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Da questo segue che $\mathbf{v} = \mathbf{0}, |a| = 1$. Per conservare anche il verso del tempo si deve scegliere $a = 1$. L'invarianza della distanza tra eventi simultanei $(\mathbf{x}_1, t), (\mathbf{x}_2, t)$ ci dà

$$|G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, da cui segue che $G \in O(3)$. □

\mathcal{G} è un sottospazio vettoriale dello spazio delle trasformazioni affini di \mathbb{A}^4 di dimensione 10. Siccome vogliamo conservare anche l'orientazione dello spazio, data dalla scelta del sistema di riferimento, ci restringeremo alle trasformazioni con $G \in SO(3)$.

Principio di relatività di Galileo

Fissiamo un sistema di riferimento. Dato un sistema di N punti materiali possiamo estendere in modo naturale l'azione del gruppo di Galileo dallo spazio delle coordinate allo spazio degli stati di Galileo $(\mathbb{R}^3)^N \times (\mathbb{R}^3)^N \times \mathbb{R}$, definendo l'azione dei generatori g_1, g_2, g_3 nel modo seguente:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (\mathbf{x} + t\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}, t) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, t + s) \\ g_3(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (G\mathbf{x}_1, \dots, G\mathbf{x}_N, G\mathbf{v}_1, \dots, G\mathbf{v}_N, t) \end{aligned}$$

con $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in (\mathbb{R}^3)^N$, $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y})$, $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u})$, $\mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $t, s \in \mathbb{R}$, $G \in SO(3)$.

Definizione 1. *Diciamo che un sistema di riferimento è inerziale se le equazioni di Newton (1.6) in questo riferimento sono invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo di Galileo \mathcal{G} .*³

L'invarianza delle equazioni di Newton significa che, data una qualunque soluzione $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$ di queste equazioni, ogni elemento $g \in \mathcal{G}$ la trasforma in un'altra soluzione della stessa equazione.

Il principio di relatività di Galileo afferma che esistono dei riferimenti inerziali.

In un riferimento inerziale la proprietà di invarianza rispetto al gruppo di Galileo impone dei vincoli sulla forma delle forze:

- a) *invarianza per traslazioni del tempo:* se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione di (1.6) anche $\mathbf{x}(t+s)$ lo è, cioè

$$\ddot{\mathbf{x}}(t+s) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t+s), \dot{\mathbf{x}}(t+s), t), \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Ne segue che le forze \mathbf{F}_i non dipendono da t :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}),$$

cioè *le leggi della natura restano le stesse al passare del tempo.* Infatti, scegliendo t_1, s_1 con $t_1 + s_1 = t + s =: \tau$, dalla (1.7) si ottiene

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), t_1),$$

per cui $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = 0$.

³in realtà noi considereremo solo le trasformazioni in cui $G \in SO(3)$ perché vogliamo che preservino l'orientazione di \mathbb{E}^3

- b) invarianza per traslazioni uniformi nello spazio \mathbb{E}^3 : se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione anche $\mathbf{x}(t) + t\mathbf{v} + \mathbf{y}$ lo è (lo spazio è omogeneo). Ne segue che

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{F}}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k)$$

cioè le forze dipendono solo dalle distanze e dalle velocità relative.

Consideriamo il caso di una forza dipendente solo dalle posizioni: la dipendenza dalle velocità si tratta in modo analogo utilizzando l'invarianza rispetto alle trasformazioni $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + t\boldsymbol{\eta}$ (moti uniformi). Data una funzione $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$, questa si può sempre scrivere come funzione $\tilde{\mathbf{F}}$ delle variabili $(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N)$, dove $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{x}_1$, $\boldsymbol{\xi}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1$, $j = 2 \dots N$. Precisamente si ha

$$\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N + \boldsymbol{\xi}_1).$$

L'invarianza per traslazioni

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}, \dots, \mathbf{x}_N + \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$$

si traduce nella relazione

$$\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_N) = \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_N), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$$

per la funzione $\tilde{\mathbf{F}}$, che quindi non dipende dalla variabile \mathbf{x}_1 .

- c) invarianza per rotazioni nello spazio \mathbb{E}^3 : se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione anche $(G\mathbf{x}_1(t), \dots, G\mathbf{x}_N(t))$ lo è, per ogni $G \in SO(3)$ (lo spazio è isotropo), e si ha la relazione

$$\mathbf{F}_i(G\mathbf{x}_1, \dots, G\mathbf{x}_N, G\mathbf{v}_1, \dots, G\mathbf{v}_N) = G\mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

In particolare, se il sistema consiste di un solo punto, il suo moto in ogni sistema di riferimento inerziale è rettilineo uniforme, infatti per a), b) la forza non dipende da $t, \mathbf{x}, \mathbf{v}$, quindi è costante; per c) essa è invariante per rotazioni, quindi è nulla. Questo ci dà il primo principio della Dinamica, detto anche principio di inerzia, che era già noto a Galileo.

1.5 Sistemi meccanici

Definizione 2. Consideriamo un insieme di N punti materiali, $P_i, i = 1 \dots N$, di masse m_i , su cui agiscono delle forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ assegnate a priori in un sistema di riferimento Σ . Diciamo che questo è un sistema meccanico classico (discreto, non vincolato) se il moto dei punti soddisfa le equazioni di Newton (1.6). Se vale anche il principio di relatività di Galileo parleremo di sistema meccanico galileiano.

Facciamo alcune osservazioni:

1. il fatto che valga il principio di relatività implica che il moto del sistema può essere studiato in un riferimento inerziale;
2. per introdurre un sistema meccanico dobbiamo specificare un sistema di riferimento, in quanto le forze in gioco dipendono da esso.

Nei sistemi che considereremo il principio di relatività può essere violato. L'esempio più semplice è quello della caduta di un grave, cioè, fissato un riferimento $O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$, il moto di un punto materiale di massa m soggetto alla forze di gravità $-mg\hat{e}_3$. È evidente la mancanza di invarianza per rotazione dell'equazione del moto: la direzione della gravità è privilegiata. Questo si spiega perché il principio di relatività vale per sistemi isolati. In questo semplice modello matematico stiamo considerando il punto materiale in un campo di forze esterno (quello della gravità), quindi non è un sistema isolato. Potremmo anche usare un modello diverso, più complesso, includendo la Terra nel sistema, ma ai fini di fare predizioni per questo problema spesso conviene impostare il problema nel modo più semplice.

Parleremo quindi di sistemi meccanici distinguendo tra forze interne e forze esterne (vedi Sezione 4.2), essendo le prime prodotte dall'interazione tra i punti del sistema.

1.6 Dinamica di un punto materiale P

Consideriamo un punto materiale P di massa m su cui agisce una forza \vec{F} nel sistema di riferimento $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$. Siano $\vec{x}_P, \vec{v}_P, \vec{a}_P$ la posizione, la velocità e l'accelerazione di P relative a Σ . Denoteremo le coordinate in \mathbb{R}^3 delle rispettive quantità con gli stessi simboli ma senza il simbolo di vettore '→'.

Nella descrizione del moto di P saranno utili le seguenti quantità:

QUANTITÀ DI MOTO (o MOMENTO LINEARE)

$$\vec{p} = m\vec{v}_P$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A UN POLO $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{M}_Q = (P - Q) \times m\vec{v}_P$$

ENERGIA CINETICA⁴

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_P|^2$$

⁴la quantità $m|\vec{v}_P|^2$ è stata introdotta da Leibniz con il nome di *vis viva*.

MOMENTO DELLA FORZA \mathbf{F} RISPETTO A UN POLO $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{\mathbf{N}}_Q = (P - Q) \times \vec{\mathbf{F}}$$

POTENZA DELLA FORZA $\vec{\mathbf{F}}$

$$\Pi = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_P$$

LAVORO ELEMENTARE ALL'ISTANTE t DELLA FORZA $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}_P, \vec{\mathbf{v}}_P, t)$

$$\delta\mathcal{L} = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}_P$$

Consideriamo il caso di una forza posizionale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$. Per essa il lavoro elementare è una 1-forma differenziale su \mathbb{R}^3 . Se tale forma è esatta ed $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è il suo potenziale possiamo definire la seguente quantità:

ENERGIA POTENZIALE

$$V = -U.$$

Un campo di forze posizionale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$ che ammette un potenziale si dice conservativo. In tal caso, se $V(\mathbf{x}_P)$ è l'energia potenziale del campo di forze, si ha

$$\delta\mathcal{L} = -\nabla V \cdot d\mathbf{x}_P = -dV,$$

e si definisce la sua

ENERGIA TOTALE

$$E = T + V.$$

ESEMPI DI FORZE CONSERVATIVE:

1) $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -mg\mathbf{e}_3$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (forza peso)

$$V(\mathbf{x}) = mg\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3, \quad \nabla V(\mathbf{x}) = mg\mathbf{e}_3 = -\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

2) $\mathbf{F} = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$, $\rho = |\mathbf{x}|$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (forza centrale a simmetria sferica)

$$V(\mathbf{x}) = -\int f(\rho) d\rho, \quad \nabla V(\mathbf{x}) = -f(\rho)\nabla\rho = -f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

1.7 Equazioni di bilancio e leggi di conservazione

Consideriamo un punto materiale P di massa m con coordinate \mathbf{x}_P , su cui agisca una forza \mathbf{F} .

Proposizione 2. Sia $t \rightarrow \mathbf{x}_P(t)$ una soluzione dell'equazione di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P$. Allora valgono le relazioni

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (1.8)$$

e, per ogni punto $Q \in \mathbb{E}^3$,

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - m\mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}_P. \quad (1.9)$$

Dimostrazione. Basta calcolare la derivata totale di \mathbf{p} e di \mathbf{M}_Q , cioè la derivata temporale lungo una qualunque soluzione di $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P$. □

Proposizione 3. (teorema dell'energia cinetica) Sia $t \rightarrow \mathbf{x}_P(t)$ una soluzione dell'equazione di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P$. Allora

$$\dot{T} = \Pi.$$

Dimostrazione.

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_P = m\mathbf{a}_P \cdot \mathbf{v}_P = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P) = \dot{T}.$$

□

Proposizione 4. Valgono le seguenti leggi di conservazione

- 1) se la componente di \mathbf{F} nella direzione $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ è nulla allora $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}$ si conserva durante il moto;
- 2) se il momento della forza \mathbf{F} rispetto ad un polo Q in quiete (nel riferimento in cui si studia il moto) ha componente nulla nella direzione \mathbf{e} allora $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}$ si conserva durante il moto.

Dimostrazione. Basta moltiplicare scalarmente per \mathbf{e} le relazioni (1.8), (1.9). □

Ad esempio, per un punto materiale soggetto alla forza peso $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_3$ si conservano $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}_3$ rispetto ad ogni polo fisso Q .

La quantità $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}$ si chiama anche momento assiale relativo alla retta $Q\mathbf{e} = \{Q + \lambda\mathbf{e}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ (passante per Q e avente la direzione di \mathbf{e}) e non cambia scegliendo come polo un punto qualunque su tale retta.

Proposizione 5. (conservazione dell'energia) Se il campo di forze $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$ è conservativo, con energia potenziale $V(\mathbf{x}_P)$, allora l'energia totale $E = T + V$ è un integrale primo.

Dimostrazione.

$$\dot{T} = \Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_P = -\nabla V \cdot \mathbf{v}_P = -\dot{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(T + V) = 0.$$

□

Capitolo 2

Sistemi di riferimento in moto relativo

Consideriamo due sistemi di riferimento

$$\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad \Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$$

nello spazio euclideo \mathbb{E}^3 . Le terne di vettori $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ e $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ dei sistemi di riferimento formano due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dello spazio vettoriale \mathbb{V}^3 associato ad \mathbb{E}^3 . Pertanto, dato un vettore $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$, esistono uniche le rappresentazioni in tali basi

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^3 u_h \hat{\mathbf{e}}_h, \quad \vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^3 u'_h \hat{\mathbf{e}}'_h.$$

Sia data una mappa

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{V}^3.$$

Definiamo le derivate temporali di $\vec{\mathbf{u}}$ nei sistemi di riferimento Σ e Σ' come

$$\left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^3 \dot{u}_h \hat{\mathbf{e}}_h, \quad \left. \frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \sum_{h=1}^3 \dot{u}'_h \hat{\mathbf{e}}'_h.$$

2.1 Velocità angolare e formule di Poisson

Proposizione 6. *Dati due sistemi di riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3, \Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$, esiste un'unica mappa vettoriale $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \in \mathbb{V}^3$ detta velocità angolare di Σ' rispetto a Σ , tale che*

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}'_h, \quad h = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Le relazioni (2.1) si chiamano formule di Poisson.

Dimostrazione. Considero la matrice $R \in SO(3)$ di cambiamento di base da $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ a $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, con componenti $R_{ji} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$, $i, j = 1, 2, 3$. Siano inoltre $\mathbf{e}_h \in \mathbb{R}^3$ i vettori della base canonica, che rappresentano $\hat{\mathbf{e}}_h$ nella base \mathcal{B} ed $\mathbf{e}'_h \in \mathbb{R}^3$ i vettori delle componenti di $\hat{\mathbf{e}}'_h$ in \mathcal{B} . Valgono le relazioni $\mathbf{e}'_h = R\mathbf{e}_h$, $j = 1, 2, 3$. Il vettore

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma}$$

è rappresentato da $\dot{\mathbf{e}}'_h \in \mathbb{R}^3$ nella base \mathcal{B} . Dalla relazione $R^T R = I$ si ottiene

$$\dot{\mathbf{e}}'_h = \dot{R}R^T R\mathbf{e}_h = \dot{R}R^T \mathbf{e}'_h = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}'_h$$

per $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$, infatti $\dot{R}R^T$ è antisimmetrica, come si vede derivando $RR^T = I$ rispetto a t . Data una matrice antisimmetrica A , esiste un unico vettore $\boldsymbol{\Omega}$ tale che

$$A\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

La relazione tra le componenti di A e di $\boldsymbol{\Omega}$ è la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T.$$

Il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{h=1}^3 \Omega_h \hat{\mathbf{e}}_h \in \mathbb{V}^3$, rappresentato da $\boldsymbol{\Omega}$ in \mathcal{B} , è la velocità angolare. Infatti se \mathbf{a}, \mathbf{b} rappresentano $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ in \mathcal{B} , allora $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ è rappresentato da $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} &= \sum_{i=1}^3 a_i \hat{\mathbf{e}}_i \times \sum_{j=1}^3 b_j \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{\substack{i,j=1 \\ 3}}^3 a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (a_i b_j - a_j b_i) \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{h=1}^3 (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_h \hat{\mathbf{e}}_h. \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'unicità si dimostra per assurdo. Se esistessero $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1, \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$ che soddisfano le (2.1), allora $(\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 - \vec{\boldsymbol{\omega}}_2) \times \hat{\mathbf{e}}'_h = \mathbf{0}$, $h = 1, 2, 3$. Quindi $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 = \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$. □

Esercizio 3. Per ogni $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbb{V}^3$ l'applicazione lineare

$$\mathbb{V}^3 \ni \vec{\mathbf{u}} \mapsto \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{u}}$$

ha nucleo di dimensione di dispari.

Suggerimento: scrivere la matrice corrispondente a questa applicazione in una base di cui $\vec{\mathbf{a}}$ è un elemento.

Una formula esplicita per la velocità angolare è data da

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 \hat{e}'_h \times \frac{d\hat{e}'_h}{dt} \Big|_{\Sigma} \quad (2.3)$$

infatti, usando le formule di Poisson,

$$\sum_{h=1}^3 \hat{e}'_h \times \frac{d\hat{e}'_h}{dt} \Big|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^3 \hat{e}'_h \times (\vec{\omega} \times \hat{e}'_h) = \sum_{h=1}^3 [\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \hat{e}'_h) \hat{e}'_h] = 2\vec{\omega}.$$

Esempio 1. Siano $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$, $\Sigma' = O \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$ due sistemi di riferimento con la stessa origine O . Assumiamo che Σ' ruoti attorno all'asse $O\hat{e}_3$ di Σ in modo che i vettori \hat{e}'_1 e \hat{e}_1 formino un angolo $\theta(t)$. Calcoliamo la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ .

Abbiamo che

$$\hat{e}'_1 = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2, \quad \hat{e}'_2 = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2, \quad \hat{e}'_3 = \hat{e}_3. \quad (2.4)$$

Derivando le (2.4) rispetto a t ed applicando (2.3) si ottiene che

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3$$

Velocità e accelerazione relative a riferimenti diversi

Data una mappa vettoriale differenziabile $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{u}(t) \in \mathbb{V}^3$, vale la relazione

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\Sigma} = \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u} \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Osservo innanzitutto che

$$\vec{u} = \sum_i u'_i \hat{e}'_i = \sum_i u'_i \sum_j R_{ji} \hat{e}_j = \sum_j \left(\sum_i u'_i R_{ji} \right) \hat{e}_j.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\Sigma} &= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\sum_i u'_i R_{ji} \right) \hat{e}_j = \sum_j \sum_i \left(\dot{u}'_i R_{ji} + u'_i \dot{R}_{ji} \right) \hat{e}_j = \\ &= \sum_i \dot{u}'_i \left(\sum_j R_{ji} \hat{e}_j \right) + \sum_i u'_i \sum_j \dot{R}_{ji} \hat{e}_j = \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\Sigma'} + \sum_i u'_i \frac{d\hat{e}'_i}{dt} \Big|_{\Sigma} = \\ &= \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\Sigma'} + \sum_i u'_i \vec{\omega} \times \hat{e}'_i = \frac{d\vec{u}}{dt} \Big|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u}. \end{aligned}$$

□

Osservazione 1. Dalla (2.5) segue che la derivata temporale di $\vec{\omega}$ in Σ ed in Σ' coincidono. Per questo motivo in seguito scriveremo anche $\dot{\vec{\omega}}$ al posto di $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_{\Sigma}$ e di $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_{\Sigma'}$.

Se \mathbf{u} , \mathbf{u}' rappresentano le coordinate del vettore $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$ nelle basi $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ rispettivamente, possiamo scrivere

$$\dot{\mathbf{u}} = R\dot{\mathbf{u}}' + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{u}'$$

dove $R \in SO(3)$, $R\mathbf{e}_h = \mathbf{e}'_h$.

Composizione di velocità angolari

Considero tre sistemi di riferimento in \mathbb{E}^3 :

$$\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3; \quad \Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3; \quad \Sigma'' = O'' \hat{\mathbf{e}}''_1 \hat{\mathbf{e}}''_2 \hat{\mathbf{e}}''_3.$$

Se $\vec{\omega}'$ è la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ e se $\vec{\omega}''$ è la velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ' , allora la velocità angolare $\vec{\omega}$ di Σ'' rispetto a Σ è data dalla somma $\vec{\omega}' + \vec{\omega}''$.

Dimostrazione. Usando la (2.5) e le formule di Poisson si ha, per $h = 1, 2, 3$,

$$\vec{\omega} \times \hat{\mathbf{e}}''_h = \frac{d\hat{\mathbf{e}}''_h}{dt}\Big|_{\Sigma} = \frac{d\hat{\mathbf{e}}''_h}{dt}\Big|_{\Sigma'} + \vec{\omega}' \times \hat{\mathbf{e}}''_h = (\vec{\omega}'' + \vec{\omega}') \times \hat{\mathbf{e}}''_h.$$

Si conclude usando l'unicità della velocità angolare. □

Equazione del moto in riferimenti diversi

Possiamo scrivere due formule, che legano la velocità $\vec{\mathbf{v}}$ e l'accelerazione $\vec{\mathbf{a}}$ di un punto materiale P in un sistema di riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ a quelle calcolate relativamente ad un altro riferimento $\Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$, in moto con velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto a Σ , denotate con $\vec{\mathbf{v}}'$, $\vec{\mathbf{a}}'$ rispettivamente.

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{v}}^T, \quad \vec{\mathbf{v}}^T = \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O') \quad (2.6)$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}' + \vec{\mathbf{a}}^T + \vec{\mathbf{a}}^C, \quad \vec{\mathbf{a}}^T = \vec{\mathbf{a}}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')), \quad \vec{\mathbf{a}}^C = 2\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}' \quad (2.7)$$

Per ricavare le formule precedenti scriviamo

$$P - O = (P - O') + (O' - O).$$

Derivando rispetto a t in Σ e usando (2.5) si ha

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \left. \frac{d(P - O')}{dt} \right|_{\Sigma} = \vec{v}_{O'} + \left. \frac{d(P - O')}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times (P - O')$$

da cui segue (2.6). Derivando ancora si ottiene¹

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \left. \frac{d^2(P - O')}{dt^2} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) + \vec{\omega} \times \vec{v}',$$

da cui segue (2.7).

I termini \vec{a}^T e \vec{a}^C si chiamano rispettivamente accelerazione di trascinamento e accelerazione di Coriolis. Il termine $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O'))$ si chiama accelerazione centripeta. In coordinate nella base \mathcal{B} abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= R\mathbf{x}' + \mathbf{x}_{O'}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= R\dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}', \\ \ddot{\mathbf{x}} &= R\ddot{\mathbf{x}}' + \ddot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\mathbf{x}' + 2\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{x}}' \end{aligned}$$

in cui $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ è il vettore delle coordinate di $(P - O')$ in \mathcal{B}' .

Se l'equazione del moto di un punto materiale P di massa m in un riferimento $O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ si scrive

$$m\vec{a} = \vec{\mathbf{F}}(P - O, \vec{v}, t)$$

allora, nel riferimento $O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$ possiamo scrivere

$$m\vec{a}' = \vec{\mathbf{F}}((P - O') + (O' - O), \vec{v}' + \vec{v}^T, t) - m\vec{a}^T - m\vec{a}^C.$$

In coordinate nella base \mathcal{B} l'ultima equazione diventa

$$mR\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}(R\mathbf{x}' + \mathbf{x}_{O'}, R\dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') - m(\ddot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\mathbf{x}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{x}}'.$$

Esempio: deviazione dei gravi in caduta libera

Considero il moto di un punto materiale P studiato in un sistema di riferimento solidale alla Terra, assumendo che questa abbia forma sferica e che ruoti attorno ad una direzione fissa con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante. Dato un sistema di riferimento $\Sigma' = O'xyz$ solidale alla Terra l'accelerazione relativa è data da

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}^T - \vec{a}^C$$

dove

$$\vec{a} = \vec{g}, \quad \vec{a}^T = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')), \quad \vec{a}^C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

¹usiamo la relazione $\left. \frac{d}{dt}(\vec{u} \times \vec{v}) \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d}{dt}\vec{u} \right|_{\Sigma} \times \vec{v} + \vec{u} \times \left. \frac{d}{dt}\vec{v} \right|_{\Sigma}$, che segue dalla (2.2).

Inoltre $\vec{a}_{O'} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - C))$, dove C è il centro della Terra. Siccome $P - O'$ è molto più piccolo di $O' - C$ posso trascurare il termine $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O'))$ quindi

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - C)) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Poniamo

$$\vec{g}_{O'} = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (O' - C));$$

questo mi dà la gravità locale. Possiamo orientare Σ' nel modo seguente: scelgo l'asse $O'z$ lungo la direzione della gravità locale, l'asse $O'x$ parallelo al piano del meridiano, verso l'equatore, e l'asse $O'y$ in modo tale che $O'xyz$ sia levogira.

Approssimiamo la gravità locale con \vec{g} . Indicando con λ la latitudine di O' e passando in coordinate ottengo il sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x} = 2\omega \sin \lambda \dot{y}, \quad \ddot{y} = -2\omega \sin \lambda \dot{x} - 2\omega \cos \lambda \dot{z}, \quad \ddot{z} = -g + 2\omega \cos \lambda \dot{y} \quad (2.8)$$

e scelgo le condizioni iniziali

$$x(0) = y(0) = z(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0.$$

La soluzione di questo sistema di equazioni differenziali lineari si può scrivere esplicitamente, comunque otterremo un risultato qualitativo facendo un'approssimazione. Integrando la prima e la terza equazione in (2.8) e sostituendo nella seconda si ottiene

$$\ddot{y} = -4\omega^2 y + 2g\omega t \cos \lambda.$$

Trascurando il termine con ω^2 e integrando si ottiene

$$y(t) = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos \lambda.$$

Questa formula ci dà la deviazione verso Est del grave in caduta libera.

Capitolo 3

Moti centrali

Definizione 3. Si dice che $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un **campo di forze centrale** con centro O se per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vale la relazione

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad (3.1)$$

dove $\rho = |\mathbf{x}|$.

Proposizione 7. Un campo di forze $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è centrale se e solo se

$$\mathbf{F}(R\mathbf{x}) = R\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \forall R \in SO(3). \quad (3.2)$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ è della forma (3.1) allora si verifica facilmente che vale (3.2), in quanto si ha $|R\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| = \rho$ per ogni $R \in SO(3)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Assumiamo adesso che valga (3.2). Mostriamo prima che $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dato $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, per ogni $R \in SO(3)$ tale che $R\mathbf{x} = \mathbf{x}$ dalla (3.2) si ottiene

$$R\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(R\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

cioè ogni rotazione che fissa \mathbf{x} fissa anche $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Per le proprietà delle rotazioni si ha quindi

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Per dimostrare che $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}$ per una qualche funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, cioè che il campo di forze è a simmetria sferica, basta mostrare che

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y}$$

per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ con $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$. Scelta $R \in SO(3)$ tale che $R\mathbf{x} = \mathbf{y}$, e usando (3.2) si ha

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F}(R\mathbf{x}) \cdot R\mathbf{x} = R\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot R\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}.$$

□

Osserviamo che in questo caso le equazioni di Newton $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ sono invarianti solo rispetto ad alcune trasformazioni di Galileo, quelle del tipo g_3 , ma non lo sono rispetto alle traslazioni dell'origine, che corrisponde al centro di forza. Quindi nel caso di forze centrali non vale il principio di relatività di Galileo.

3.1 Integrabilità dei moti centrali

Considero il moto di un punto materiale di massa m in un campo di forze centrali $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$. Dalla relazione

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O = \mathbf{x} \times f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho} = \mathbf{0}$$

abbiamo la conservazione del momento angolare \mathbf{M}_O rispetto al centro di forze O . Inoltre la forza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ è conservativa, con energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\rho(\mathbf{x})), \quad \mathcal{V}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho, \quad (3.3)$$

per cui si conserva l'energia totale $E = T + V$.

Definizione 4. *Un sistema meccanico si dice integrabile se per ogni scelta delle condizioni iniziali possiamo scrivere la soluzione delle equazioni di Newton a meno di inversioni e quadrature¹.*

Proposizione 8. *Il sistema dato da un punto materiale che si muove in un campo di forze centrali è integrabile.*

Trattiamo prima il caso particolare in cui $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ e mostriamo che in questo caso il moto si svolge su una retta passante per O . Poiché $\mathbf{M}_O = m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, possiamo trovare un vettore unitario $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ con

$$\mathbf{x}(0) = \rho_0\mathbf{e}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\rho}_0\mathbf{e}.$$

Se $t \mapsto \rho(t)$ è la soluzione del problema di Cauchy unidimensionale

$$m\ddot{\rho} = f(\rho), \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0 \quad (3.4)$$

allora

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) = \rho(t)\mathbf{e}$$

è la soluzione di $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, con dati iniziali $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$, infatti

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\ddot{\rho}\mathbf{e} = f(\rho)\frac{\rho\mathbf{e}}{\rho} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

¹cioè calcolo di primitive

Quindi il moto è rettilineo e si svolge su una retta passante per O .

Osserviamo che vale anche il viceversa: se il moto avviene lungo una retta passante per O allora $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)$ sono sempre paralleli, quindi $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$.

L'equazione differenziale in (3.4) deriva dall'equazione del primo ordine

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \mathcal{V}(\rho) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}_0^2 + \mathcal{V}(\rho_0)$$

che può essere integrata per separazione delle variabili.

Assumiamo adesso che $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$. Possiamo usare la conservazione del momento angolare \mathbf{M}_O per ridurci ad un problema unidimensionale. L'invarianza della direzione di \mathbf{M}_O implica che il moto si svolge su un piano fisso π_O che dipende dalle condizioni iniziali: infatti la relazione

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = 0$$

ci dice che il vettore \mathbf{x} è sempre ortogonale a \mathbf{M}_O . Possiamo quindi ruotare il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ introdotto, in funzione delle condizioni iniziali, facendo in modo che $\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{M}_O$. Con questa rotazione il moto si svolge quindi nel piano $\pi_O = O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$. Introduciamo in questo piano delle coordinate polari ρ, θ , definite da

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\mathbf{x}}{\rho} = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2.$$

Consideriamo anche il vettore

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_\rho = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2$$

ed osserviamo che valgono le relazioni

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_\rho.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{x} = \rho\mathbf{e}_\rho, \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\theta}\rho\mathbf{e}_\theta, \quad \ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta.$$

L'equazione di Newton, proiettata lungo $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$, ci dà

$$m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = f(\rho), \quad m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0. \quad (3.5)$$

La seconda equazione in (3.5) rappresenta la conservazione della terza componente del momento angolare

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3 = \rho\mathbf{e}_\rho \times m(\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{e}_3 = m\rho^2\dot{\theta},$$

infatti

$$m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}).$$

Fissiamo un valore $c \neq 0$ di tale quantità:

$$m\rho^2\dot{\theta} = c. \quad (3.6)$$

Sostituendo $\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2}$ nella prima equazione in (3.5) ci riduciamo al problema unidimensionale

$$m\ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho}V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho), \quad V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}. \quad (3.7)$$

La funzione $V_{\text{eff}}^{(c)}$ si dice energia potenziale efficace. Il sistema (3.7) ha l'integrale primo

$$E_{\text{eff}}^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho),$$

che corrisponde all'energia totale $E = T + V$ scritta come funzione di $\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}$ con la condizione (3.6):

$$E|_{\dot{\theta}=\frac{c}{m\rho^2}} = \left[\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + V(\rho) \right] \Big|_{\dot{\theta}=\frac{c}{m\rho^2}} = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{2m\rho^2} + V(\rho) = E_{\text{eff}}^{(c)}.$$

3.2 Legge delle aree

Dalla conservazione del momento angolare si ha che, se $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$, θ è monotona, quindi può essere utilizzata come variabile indipendente per descrivere la traiettoria. Infatti se $c \neq 0$, allora $\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2}$ ha lo stesso segno di c .

Sia $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\theta_0, \theta)$ l'insieme descritto dal raggio vettore quando l'angolo polare passa dal valore θ_0 a θ . L'area di questo insieme è

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\theta_0}^{\theta} \int_0^{\rho(\theta')} \rho' d\rho' d\theta' = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \rho^2(\theta') d\theta',$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\mu(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{c}{2m},$$

quindi la conservazione della terza componente del momento angolare

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3 = m\rho^2\dot{\theta}$$

corrisponde alla conservazione della velocità areolare, detta anche **legge delle aree**.

3.3 Formula di Binet

Consideriamo un punto materiale che si muove in un piano in cui mettiamo coordinate polari (ρ, θ) . Assumiamo che valga la legge delle aree:

$$\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \alpha,$$

con $\alpha \neq 0$. Queste ipotesi valgono in particolare nel caso dei moti centrali. Allora la componente radiale dell'accelerazione è

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \right). \quad (3.8)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{d\rho}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{2\alpha}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} = -2\alpha \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right), \\ \ddot{\rho} &= \dot{\theta} \frac{d\dot{\rho}}{d\theta} = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right), \end{aligned}$$

per cui, usando la formula $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ si ottiene (3.8).

3.4 Traiettoria del moto

Fissate le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0)$, $\dot{\mathbf{x}}(0)$, per determinare il comportamento qualitativo della traiettoria nel piano del moto, con coordinate polari (ρ, θ) , si utilizzano le leggi di conservazione

$$m\rho^2\dot{\theta} = c, \quad \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = E, \quad (3.9)$$

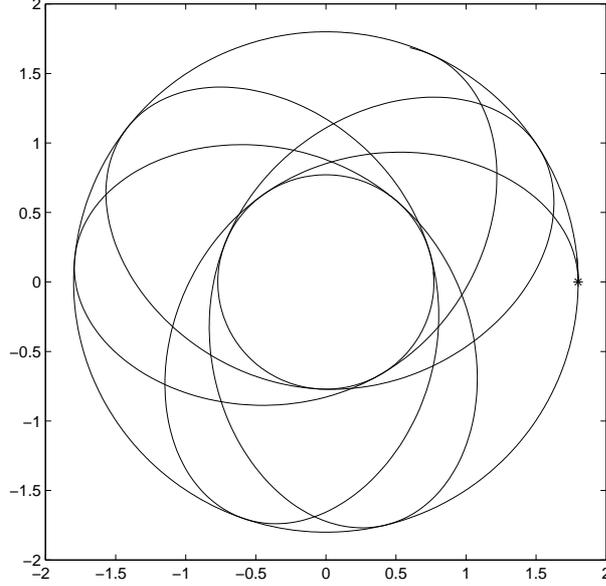
in cui c , E sono i valori delle quantità conservate al tempo iniziale $t = 0$.

Se $c = 0$ abbiamo già visto nella Proposizione 8 che la traiettoria è rettilinea. Se $c \neq 0$ allora possiamo descrivere la traiettoria attraverso una mappa $\theta \mapsto \rho(\theta)$. Dalle (3.9) si ottiene

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{m\rho^2}{c} \sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)]}. \quad (3.10)$$

Consideriamo il caso seguente in cui la traiettoria è limitata (in questo caso si parla di *stati legati*). Siano ρ_{\min} , ρ_{\max} due soluzioni consecutive di $V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = E$, con $0 < \rho_{\min} < \rho_{\max} < +\infty$, e tali che

$$\frac{d}{d\rho} V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho_{\min}) \neq 0, \quad \frac{d}{d\rho} V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho_{\max}) \neq 0.$$



Assumiamo inoltre che esista $\bar{\rho} \in (\rho_{min}, \rho_{max})$ con $V_{\text{eff}}^{(c)}(\bar{\rho}) < E$, cioè che esistano dei moti con energia E e valori di ρ nell'intervallo $[\rho_{min}, \rho_{max}]$.

In questo caso, nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ abbiamo un'orbita periodica di periodo

$$T_{\rho} = \sqrt{2m} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{1}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)}} d\rho.$$

Nel piano del moto genericamente si ottiene una traiettoria a forma di rosetta (vedi figura): infatti dalla conservazione del momento angolare si ha che $t \mapsto \theta(t)$ è monotona. Inoltre ρ oscilla periodicamente tra il valore massimo ρ_{max} e il valore minimo ρ_{min} . Data la mappa $\theta \mapsto \rho(\theta)$, la traiettoria della soluzione si può scrivere

$$\theta \mapsto (x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$$

e ha la seguente simmetria:

$$R_{2(\theta-\theta_0)} \begin{pmatrix} x(\theta_0 - \theta) \\ y(\theta_0 - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\theta - \theta_0) \\ y(\theta - \theta_0) \end{pmatrix}$$

dove

$$R_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

e θ_0 corrisponde ad un punto di inversione.

Definiamo l'**angolo di avanzamento** del pericentro come

$$\Delta\theta = c\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\rho^2 \sqrt{E - V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)}} d\rho. \quad (3.11)$$

La condizione per avere una traiettoria periodica nel piano del moto è che

$$\frac{\Delta\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Dimostriamo adesso la seguente

Proposizione 9. *In generale la traiettoria è ovunque densa nella corona circolare*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}\}.$$

Dimostrazione. Tutti i valori di ρ nell'intervallo $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ vengono raggiunti periodicamente. Fissiamo una circonferenza C_ρ centrata in O e di raggio $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$. Dimostriamo, seguendo [4], che in generale C_ρ viene riempito in modo ovunque denso.

Definiamo la mappa

$$\phi : C_\rho \rightarrow C_\rho, \quad \phi(\rho e^{i\theta}) \mapsto \rho e^{i(\theta + \Delta\theta)}$$

dove $\Delta\theta$ è l'angolo di avanzamento del pericentro.

Se $\Delta\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$ allora i punti $\{\phi^m(x)\}_m$, con $x = \rho e^{i\theta}$, sono tutti distinti. Siccome C_ρ è compatto c'è almeno un punto di accumulazione, quindi per ogni $\epsilon > 0$ esistono interi positivi n, m , con $n > m$, tali che

$$d(\phi^n(x), \phi^m(x)) < \epsilon.$$

Inoltre la mappa ϕ conserva la distanza tra due punti, quindi

$$d(\phi^{n-m}(x), x) = d(\phi^n(x), \phi^m(x)) < \epsilon.$$

posto $k = n - m$ otteniamo una successione

$$x, \phi^k(x), \phi^{2k}(x), \phi^{3k}(x), \dots$$

di punti distinti su C_ρ che sono equidistanti e due consecutivi di essi distano meno di ϵ . Si conclude usando l'arbitrarietà di ϵ .

□

3.5 Il problema dei 2 corpi

Studiamo il moto di due punti materiali di massa m_1, m_2 soggetti alla loro interazione mutua dovuta a forze interne di tipo classico. Le equazioni del moto sono

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_2$$

dove

- (i) $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$,
- (ii) $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$,
- (iii) $\mathbf{F}_j \times \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$,
- (iv) $\mathbf{F}_j = f_j(\rho) \frac{\mathbf{r}}{\rho}, \quad \rho = |\mathbf{r}|$

dove $f_j : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, per $j = 1, 2$.

Il cambiamento di coordinate

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto (\mathbf{x}_B, \mathbf{r})$$

definito dalle relazioni

$$(m_1 + m_2)\mathbf{x}_B = m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

disaccoppia le equazioni di Newton: si ottengono infatti le equazioni

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{0}, \quad \mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

in cui

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad m = m_1 + m_2.$$

Possiamo quindi studiare il problema di moto centrale dato dalla seconda delle (3.12) e poi ricostruire la soluzione tramite le relazioni

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_B = \frac{m_2}{m}\mathbf{r}, \quad \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_B = -\frac{m_1}{m}\mathbf{r}. \quad (3.13)$$

Osservazione 2. *Dalle (3.13) si vede che le traiettorie nel riferimento del centro di massa si ottengono per similitudine da quelle del moto relativo, soluzione di un problema di moto centrale.*

Osservazione 3. Nel caso della forza di attrazione gravitazionale di Newton si ha $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$, dove G è la costante di gravitazione universale, per cui, utilizzando la relazione $m\mu = m_1 m_2$, si ottiene $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm\mu}{\rho^3} \mathbf{r}$, con $\rho = |\mathbf{r}|$. In questo modo la seconda equazione in (3.12) si scrive

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -Gm\mu \frac{\mathbf{r}}{\rho^3},$$

che corrisponde al problema del moto di un corpo di massa μ (massa ridotta) che si muove in un campo di forze centrali prodotto dall'attrazione gravitazionale di un punto di massa m fisso nell'origine.

3.6 Il problema di Keplero

Tycho Brahe (1546 - 1601): misura delle posizioni dei pianeti a meno di 1 minuto di arco (=1/60 grado) prima dell'invenzione del telescopio.

Johannes Kepler (1571 - 1630): collabora con Tycho a Praga nel 1601

LEGGI DI KEPLERO

- 1) i pianeti descrivono delle ellissi di cui il Sole occupa uno dei 2 fuochi;
- 2) il raggio vettore che congiunge un pianeta al Sole descrive aree uguali in tempi uguali;
- 3) i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi, cioè $\frac{T^2}{a^3}$ è una costante, che è la stessa per tutti i pianeti.

In *Astronomia Nova* (1609) appaiono le prime due leggi. La terza si trova in *Harmonices Mundi* (1619).

PROBLEMA DI KEPLERO

- i) *problema diretto*: dato il campo di forze calcolare i moti possibili;
- ii) *problema inverso*: dati i moti possibili calcolare il campo di forze.

Entrambi i problemi sono stati risolti da Newton (*Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* (1687)).

3.6.1 Problema diretto

Posto

$$k = GmM, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2,$$

considero il moto centrale dato dalle equazioni

$$m\ddot{\mathbf{x}} = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad f(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}$$

con $\rho = |\mathbf{x}|$, $k > 0$ e con condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$. La forza centrale ammette l'energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{k}{\rho}.$$

Sia $c = m\rho^2\dot{\theta}$ il valore del momento angolare che corrisponde alle condizioni iniziali. Essendo il moto centrale, si ha la legge delle aree, che rappresenta la conservazione del momento angolare $m\rho^2\dot{\theta}$ e ci dà la seconda legge di Keplero.

Proiettando l'equazione di Newton in direzione radiale \mathbf{e}_ρ ed usando la formula di Binet si ottiene l'equazione per la componente radiale della forza:

$$-\frac{4m\alpha^2}{\rho^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right] = -\frac{k}{\rho^2}$$

dove $\alpha = \frac{c}{2m}$ è la costante delle aree. Ponendo $p = \frac{4m\alpha^2}{k}$ e usando la variabile $u = 1/\rho$ si ottiene l'equazione lineare

$$u'' + u = \frac{1}{p} \tag{3.14}$$

dove l'apice ' indica la derivata rispetto a θ . L'equazione (3.14) ha come soluzione generale

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p}$$

con $A > 0$, $\theta_0 \in S^1$. Introducendo il parametro $e = Ap$ si ha l'equazione di una conica in coordinate polari²

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}. \tag{3.15}$$

p, e IN FUNZIONE DI c, E

Dalla relazione $\alpha = \frac{c}{2m}$ si ottiene subito

$$p = \frac{c^2}{mk}. \tag{3.16}$$

²nella (3.15) il polo è un fuoco della conica

Il valore minimo di ρ lungo la traiettoria definita da (3.15) è dato da

$$\rho_{min} = \frac{p}{1+e} \quad (3.17)$$

che è un punto di inversione del moto per la variabile ρ , cioè

$$E - V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho_{min}) = 0, \quad (3.18)$$

dove

$$V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

è l'energia potenziale efficace del problema di Keplero. Sostituendo le relazioni (3.16), (3.17) nella (3.18) si ha

$$\begin{aligned} 0 &= E + \frac{k}{\rho_{min}} - \frac{c^2}{2m\rho_{min}^2} = E + \frac{k^2m(1+e)}{c^2} - \frac{c^2m^2k^2(1+e)^2}{2mc^4} = \\ &= E + \frac{mk^2(1+e)}{c^2} \left(1 - \frac{1+e}{2}\right) = E + \frac{mk^2(1-e^2)}{2c^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$e^2 = 1 + \frac{2Ec^2}{mk^2}. \quad (3.19)$$

Dalla (3.19) si ottiene che

$$\begin{aligned} E < 0 &\iff e < 1 \quad (\text{orbite ellittiche}), \\ E = 0 &\iff e = 1 \quad (\text{orbite paraboliche}), \\ E > 0 &\iff e > 1 \quad (\text{orbite iperboliche}). \end{aligned}$$

Inoltre dalla relazione $mk^2 + 2Ec^2 \geq 0$ segue che non tutte le coppie (c, E) sono ammissibili (vedi Figura 3.6.1).

PERIODO DELLE ORBITE ELLITTICHE

Sia T il periodo di un'orbita ellittica che corrisponde ai valori $c, E (< 0)$ del momento angolare e dell'energia.

Valgono le relazioni seguenti, che legano semiasse maggiore a , semiasse minore b ai parametri p, e e quindi ai valori di c, E :

$$p = a(1 - e^2), \quad b = a\sqrt{1 - e^2},$$

per cui

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

L'area dell'ellisse è

$$\pi ab = \pi a \sqrt{ap} = \pi a^{3/2} \frac{c}{\sqrt{mk}}$$

e la velocità areale è

$$\alpha = \frac{c}{2m},$$

per cui

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^3 c^2}{mk} \frac{4m^2}{c^2} = \frac{4\pi^2 m}{k} a^3$$

che rappresenta la terza legge di Keplero.

Se consideriamo il problema di Keplero derivante dal problema di due corpi di massa m_1 , m_2 si ha

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad k = G m_1 m_2,$$

per cui $k/m = G(m_1 + m_2)$ e la costante di proporzionalità è quindi

$$\frac{4\pi^2 m}{k} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}.$$

Se si interpreta la somma $m_1 + m_2$ come la massa del Sole più quella di un pianeta e si assume che tale somma non dipenda dal pianeta scelto allora l'errore relativo commesso è al massimo dell'ordine di 10^{-3} , cioè uguale al rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole.

3.6.2 Il vettore di Laplace-Lenz

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho} \quad (3.20)$$

Mostriamo che \mathbf{L} è un integrale primo per il moto centrale con energia potenziale di Keplero $V(\rho) = -\frac{k}{\rho}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{M}_O + \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{N}}_O - mk \left[\frac{\mathbf{v}}{\rho} - \frac{\mathbf{x}}{\rho^2} \frac{d}{dt} (\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}) \right] = \\ &= \left(-\frac{k\mathbf{x}}{\rho^3} \right) \times (\mathbf{x} \times m\mathbf{v}) + m\mathbf{v} \times \left[\mathbf{x} \times \left(-\frac{k\mathbf{x}}{\rho^3} \right) \right] - \frac{mk}{\rho} \mathbf{v} + \frac{mk}{\rho^2} \mathbf{x} \left(\frac{2\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{2\rho} \right) = \\ &= -\frac{km}{\rho^3} [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{x} - \rho^2 \mathbf{v}] - \frac{mk}{\rho} \mathbf{v} + \frac{mk}{\rho^3} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso la norma di L .

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} &= \left(\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho} \right) \cdot \left(\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho} \right) = \\ &= |\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O|^2 - 2 \frac{mk}{\rho} \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} + m^2 k^2 = \\ &= |\mathbf{p}|^2 [|\mathbf{p}|^2 \rho^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})^2] - 2 \frac{mk}{\rho} [|\mathbf{p}|^2 \rho^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})^2] + m^2 k^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O = \mathbf{p} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2 \mathbf{x} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{p},$$

da cui

$$\begin{aligned} |\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O|^2 &= |\mathbf{p}|^2 [|\mathbf{p}|^2 \rho^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})^2], \\ \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} &= |\mathbf{p}|^2 \rho^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})^2. \end{aligned}$$

Usando la relazione

$$\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_O = |\mathbf{M}_O|^2 = c^2$$

e l'energia cinetica T si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} &= c^2 \left(|\mathbf{p}|^2 - 2 \frac{mk}{\rho} \right) + m^2 k^2 = c^2 \left(2mT - 2 \frac{mk}{\rho} \right) + m^2 k^2 = \\ &= 2mEc^2 + m^2 k^2 = m^2 k^2 \left(1 + 2 \frac{Ec^2}{mk^2} \right) = m^2 k^2 e^2. \end{aligned}$$

Concludo che la norma del vettore di Lenz è il prodotto di mk e dell'eccentricità e .

Denotiamo con ψ l'angolo tra \mathbf{x} e \mathbf{L} . Si ha allora

$$e \cos \psi = \frac{\mathbf{L}}{mk} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\rho} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x}}{mk\rho} - 1 = \frac{c^2}{mk\rho} - 1.$$

Usando la (3.16) si ottiene

$$1 + e \cos \psi = \frac{p}{\rho}$$

e si ritrova l'equazione della traiettoria in forma polare (3.15) con l'angolo ψ al posto di $\theta - \theta_0$. Ne segue che \mathbf{L} deve indicare la direzione del pericentro, che corrisponde a $\theta = \theta_0$.

3.6.3 Problema inverso

Se valgono le leggi di Keplero, l'accelerazione di ogni pianeta è sempre diretta verso il Sole ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza da esso. Inoltre la costante di proporzionalità è la stessa per tutti i pianeti.

Il fatto che il moto sia piano e che valga la legge delle aree implica che l'accelerazione sia puramente radiale.

Sostituiamo l'equazione della traiettoria

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

nella formula di Binet:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right] = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left(-\frac{e \cos \theta}{p} + \frac{1 + e \cos \theta}{p} \right) = -\frac{4\alpha^2}{p} \frac{1}{\rho^2}.$$

Quindi l'accelerazione radiale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole e la costante di proporzionalità è $-4\alpha^2/p$.

Scegliamo un'orbita ellittica. Siano T, a, b periodo e semiassi maggiore e minore di quest'orbita. Usando la formula $\alpha = \frac{\pi ab}{T^2}$ e la relazione tra il parametro p della conica ed i semiassi a, b si ottiene

$$\frac{4\alpha^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \frac{a}{b^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

che per la terza legge di Keplero è la stessa costante per ogni pianeta.

Vedremo nella Sezione 3.7 che solo due tipi di forze centrali, quelle dell'oscillatore armonico e del problema di Keplero, sono tali che tutte le orbite limitate con momento angolare non nullo sono periodiche.

3.7 Teorema di Bertrand

In [7] J. Bertrand espone il seguente suggestivo risultato:

'Parmi les lois d'attraction qui supposent l'action nulle à une distance infinie, celle de la nature est la seule pour laquelle un mobile lancé *arbitrairement* avec une vitesse inférieure à une certaine limite, et attiré vers un centre fixe, décrit nécessairement autour de ce centre une courbe fermée. Toutes les lois d'attraction *permettent* des orbites fermées, mais la loi de la nature est la seule qui les *impose*.'³

Diamo un enunciato più formale:

³Tra le leggi di attrazione che assumono azione nulla a distanza infinita, quella della natura è la sola per la quale un corpo, lanciato *arbitrariamente*, con una velocità inferiore a un certo limite, e attirato verso un centro fisso, descrive necessariamente attorno a questo centro una curva chiusa. Tutte le leggi di attrazione *permettono* orbite chiuse, ma la legge della natura è la sola che le *impone*.

Teorema 1. (Bertrand) *Se ho un campo di forze centrale attrattivo $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$, $\rho = |\mathbf{x}|$, con $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ analitica ed $f(\rho) < 0$, tale che tutte le orbite non rettilinee e limitate siano chiuse, allora*

$$f(\rho) = -\frac{A}{\rho^2} \quad \text{oppure} \quad f(\rho) = -A\rho$$

per una costante $A > 0$.

Dimostrazione. Essendo la forza attrattiva, una traiettoria rettilinea deve per forza passare per l'origine, quindi se considero traiettorie non rettilinee queste hanno necessariamente momento angolare non nullo.

Dalla formula di Binet si ha

$$f(\rho) = -\frac{k^2}{\rho^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right] \quad \text{con} \quad k^2 = 4mc^2.$$

Quindi $c = k/\sqrt{m}$. Ponendo $z = 1/\rho$ e $\psi(z) = -\rho^2 f(\rho)|_{\rho=1/z}$ si ottiene

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2} \psi(z) = 0. \quad (3.21)$$

Moltiplicando per $\frac{dz}{d\theta}$ ed integrando rispetto a θ

$$\left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2} w(z) - h = 0$$

per una costante h , con $w(z) = 2 \int \psi(z) dz$.

Ricaviamo la relazione che lega h, k^2 all'energia E . Dalle relazioni

$$w(z) = -2 \int \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2 \int f\left(\frac{1}{z}\right) d\left(\frac{1}{z}\right) = -2V\left(\frac{1}{z}\right),$$

con $-\nabla_{\mathbf{x}} V(\rho) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ e

$$\left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2 = \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]^2 = \left[-\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \right]^2 = \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2, \quad \text{con} \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\theta}} = \dot{\rho} \rho^2 \frac{\sqrt{m}}{k},$$

si ottiene

$$h = \frac{2}{k^2} \left(\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{k^2}{2\rho^2} + V(\rho) \right) = \frac{2E}{k^2}.$$

Osserviamo che l'ipotesi che la forza sia attrattiva implica l'esistenza di orbite circolari di raggio z_c per ogni scelta di $z_c > 0$: infatti queste corrispondono ad equilibri del sistema newtoniano $\frac{d^2 z}{d\theta^2} = \phi_k(z)$ con $\phi_k(z) = \frac{1}{k^2} \psi(z) - z$ e per ogni

$z_c > 0$ possiamo trovare k tale che $\phi_k(z_c) = 0$. In particolare si ottiene che l'insieme delle orbite limitate non è vuoto.⁴

Mostriamo adesso, seguendo [1], che se tutte le orbite non rettilinee e limitate sono chiuse possiamo trovare un intervallo aperto non vuoto di valori di z corrispondenti ad orbite circolari stabili.⁵ Data un'orbita circolare con $z = z_c$, se $\phi'_k(z_c) < 0$ questa è un minimo non degenere dell'energia potenziale $\mathcal{V}(z) = -\int \phi_k(z) dz$ e l'orbita circolare è stabile. Nell'ipotesi che tutte le orbite non rettilinee e limitate siano chiuse non è possibile che $\phi'_k(z_c) > 0$ oppure che $\phi'_k(z)$ sia identicamente nulla in un intorno di z_c . Infatti nel primo caso, analizzando il comportamento della separatrice instabile del sistema $\frac{dz}{d\theta} = v$, $\frac{dv}{d\theta} = \phi_k(z)$, si dimostra che c'è un'orbita limitata asintotica all'equilibrio z_c , che quindi non può essere chiusa. Nel secondo caso, per l'analiticità si ha $\phi'_k(z) \equiv 0$ e dunque

$$\psi'(z) = k^2, \quad \psi(z) = k^2 z + A \quad (A > 0), \quad f(\rho) = -\frac{k^2}{\rho^3} - \frac{A}{\rho^2}.$$

In questo caso esistono orbite non rettilinee limitate che non sono chiuse, infatti la forza efficace risulta semplicemente $f_e(\rho) = -\frac{A}{\rho^2}$ e l'energia potenziale efficace è $V_e(\rho) = -\frac{A}{\rho}$. Quindi se $E < 0$ le orbite sono limitate e doppiamente asintotiche all'origine.

Infine, se z_c è uno zero isolato di $\phi'_k(z)$ si può prendere un valore di \tilde{z}_c vicino a z_c corrispondente ad un'orbita circolare con $\phi'_k(\tilde{z}_c) < 0$.

Osserviamo che le equazioni

$$\phi_k(z) = 0, \quad \phi'_k(z) = 0,$$

non possono essere soddisfatte per valori (z, k) che formano un continuo. Infatti, dalla definizione di ϕ_k , in tal caso si avrebbe

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{1}{z}$$

che integrata ci dà $\psi(z) = Az$, con $A > 0$. Ma allora $\phi'_k(z) = \frac{A}{k^2} - 1$, per cui se è nullo per una coppia (k, z_c) allora è identicamente nullo.

Quindi, in virtù delle ipotesi fatte, possiamo trovare un intervallo aperto non vuoto di valori di z corrispondenti ad orbite limitate, che in alcuni casi sono orbite circolari stabili. Queste orbite corrispondono a certi valori di k^2 , h e quindi di c , E :

⁴In realtà per quanto segue basterebbe l'ipotesi che $f(\rho)$ assuma dei valori negativi. Se $f(\rho) > 0$ per ogni ρ allora non ci sono orbite limitate, quindi qualunque funzione $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ analitica e positiva soddisfa le ipotesi del teorema.

⁵Diciamo che l'orbita circolare di raggio z_c è stabile se z_c è un punto di equilibrio stabile di $\frac{d^2 z}{d\theta^2} = \phi_k(z)$

per ciascuna di queste chiamiamo $\alpha = z_{min}, \beta = z_{max}$ i valori minimo e massimo di z , che corrispondono a tali valori degli integrali primi c, E .

Abbiamo quindi che, $\forall \alpha, \beta$ in un intervallo aperto non vuoto \mathcal{J} , con $0 < \alpha < \beta$, l'angolo di avanzamento dal pericentro all'apocentro è dato da

$$\Delta\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}w(z) - z^2}}.$$

Poichè le orbite considerate sono chiuse, si deve avere $\Delta\theta = q\pi$, con $q \in \mathbb{Q}$.

Calcoliamo la relazione che lega h, k^2 ad α, β . Osservo che questi ultimi sono valori di inversione, quindi

$$h + \frac{1}{k^2}w(\alpha) - \alpha^2 = 0, \quad h + \frac{1}{k^2}w(\beta) - \beta^2 = 0,$$

da cui

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{w(\beta) - w(\alpha)}, \quad h = \frac{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha)}{w(\beta) - w(\alpha)}.$$

Otteniamo che deve valere la relazione

$$q\pi = I(\alpha, \beta) \tag{3.22}$$

con

$$I(\alpha, \beta) := \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{w(\beta) - w(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)w(z) - z^2(w(\beta) - w(\alpha))}} dz \tag{3.23}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{J}$, con $0 < \alpha < \beta$, quindi q deve essere costante poichè \mathbb{Q} è un insieme totalmente sconnesso.

Selezioniamo in due passi i potenziali ammissibili, che soddisfano (3.22). Il primo passo consiste nel considerare traiettorie con α, β molto vicini e passare al limite per $\beta \rightarrow \alpha$. Consideriamo un valore di $\alpha \in \mathcal{J}$ e poniamo $\beta = \alpha + u$, $z = \alpha + y$. Calcoliamo $\lim_{u \rightarrow 0} I(\alpha, \alpha + u)$ tramite la formula di Taylor:

$$w(\beta) - w(\alpha) = w'(\alpha)u + \frac{1}{2}w''(\alpha)u^2 + o(u^2),$$

inoltre

$$\begin{aligned} & \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)w(z) - z^2(w(\beta) - w(\alpha)) = \\ &= \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2) \left[w(\alpha) + w'(\alpha)y + \frac{1}{2}w''(\alpha)y^2 + o(y^2) \right] - \\ &= (\alpha^2 + 2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) = \\ &= (\beta^2 - \alpha^2) \left[w'(\alpha)y + \frac{1}{2}w''(\alpha)y^2 \right] - (2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) + o(u^3) = \\ &= (u - y)uy(w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)) + o(u^3). \end{aligned}$$

Otengo quindi che

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} I(\alpha, \alpha + u) &= \frac{\sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}} \lim_{u \rightarrow 0} (1 + o(1)) \int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} = \\ &= \frac{\pi \sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}}, \end{aligned}$$

infatti, usando il cambio di variabili $x = \sqrt{uy - y^2}$, si ha

$$\int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} = \frac{2}{u} \int_{-u/2}^{u/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 4\frac{x^2}{u^2}}} = \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \pi.$$

In particolare l'ultimo integrale è indipendente da u . Elevando al quadrato si ottiene che w deve soddisfare l'equazione differenziale

$$q^2 \alpha w''(\alpha) + (1 - q^2) w'(\alpha) = 0. \quad (3.24)$$

Ricordando la definizione di $w(z)$ si ottiene l'equazione a variabili separate

$$q^2 z \psi'(z) + (1 - q^2) \psi(z) = 0. \quad (3.25)$$

Se $q^2 = 1$, dalla (3.25) si ha $\psi(z) = A$ e dunque

$$w(z) = 2Az + B, \quad (3.26)$$

con A, B costanti di integrazione ($A > 0$). Se $q^2 \neq 1$, ponendo $\sigma = 1/q^2$ abbiamo

$$\log \psi = \log z^{1-\sigma} + \log A, \quad A > 0$$

e, passando agli esponenziali, $\psi(z) = Az^{1-\sigma}$, per cui

$$w(z) = \frac{2A}{2-\sigma} z^{2-\sigma} + B, \quad B \in \mathbb{R}, \quad (3.27)$$

che per $\sigma = 1$ si riduce alla (3.26). Secondo passo: sostituendo l'espressione (3.27) di $w(z)$ con $B = 0$ in (3.23) si ha

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma}}}{\sqrt{\alpha^2 \beta^{2-\sigma} - \beta^2 \alpha^{2-\sigma} + (\beta^2 - \alpha^2) z^{2-\sigma} - z^2 (\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma})}} dz. \quad (3.28)$$

A questo punto passiamo al limite per $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 1$ in (3.28). Distinguiamo due casi: a) $2 - \sigma > 0$; b) $2 - \sigma < 0$.⁶ Nel caso a), usando la sostituzione $\zeta = z^{\sigma/2}$, otteniamo

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^{2-\sigma}(1 - z^{\sigma})}} = 2q^2 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = q^2\pi,$$

⁶Osservo che in entrambi i casi α, β possono assumere tutti i valori reali con $0 < \alpha < \beta < 1$. Infatti, posto $\mathcal{V}(z) = -\int \phi_k(z) dz = z^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{Az^{-\sigma}}{k^2(2-\sigma)} \right]$ e scelti arbitrariamente α, β con $0 < \alpha < \beta < 1$, possiamo trovare dei valori di k^2, h tali che α, β siano zeri consecutivi di $E - \mathcal{V}(z)$.

quindi $q = 1$, $\psi(z) = A$ ed $f(\rho) = -A/\rho^2$. Nel caso b) invece

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2},$$

quindi $q = \frac{1}{2}$, $\psi(z) = Az^{-3}$ ed $f(\rho) = -A\rho$.

□

Capitolo 4

Dinamica dei sistemi di N punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali P_i di massa m_i , $i = 1, \dots, N$, su cui agiscono le forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ nel sistema di riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$. Siano $\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{a}}_i$ la posizione, la velocità e l'accelerazione di P_i relative a Σ e $\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$ le loro coordinate. Introduciamo le seguenti quantità, utili a descrivere la dinamica degli N punti nel loro insieme:

QUANTITÀ DI MOTO TOTALE (MOMENTO LINEARE)

$$\vec{\mathbf{p}} = \sum_{j=1}^N \vec{\mathbf{p}}_j = \sum_{j=1}^N m_j \vec{\mathbf{v}}_j$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A UN POLO Q

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \sum_{j=1}^N (P_j - Q) \times m_j \vec{\mathbf{v}}_j$$

ENERGIA CINETICA

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |\vec{\mathbf{v}}_j|^2$$

RISULTANTE DELLE FORZE \mathbf{F}_j

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{j=1}^N \vec{\mathbf{F}}_j$$

MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE \mathbf{F}_j RISPETTO A UN POLO Q

$$\vec{\mathbf{N}}_Q = \sum_{j=1}^N (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_j$$

POTENZA RISULTANTE DELLE FORZE $\vec{\mathbf{F}}_j$

$$\Pi = \sum_{j=1}^N \vec{\mathbf{F}}_j \cdot \vec{\mathbf{v}}_j$$

LAVORO ELEMENTARE ALL'ISTANTE t DELLE FORZE $\vec{\mathbf{F}}_j$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \vec{\mathbf{F}}_j \cdot d\vec{\mathbf{x}}_j$$

4.1 Teoremi di scomposizione relativi al baricentro

Introduciamo la massa totale

$$m = \sum_{j=1}^N m_j$$

e le coordinate del baricentro $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^3$, definite da

$$m(B - O) = \sum_{j=1}^N m_j(P_j - O). \quad (4.1)$$

Definizione 5. *Dato un sistema di N punti materiali e fissato un sistema di riferimento Σ , il **riferimento del baricentro** è il sistema di riferimento Σ_B centrato in B ed orientato come Σ .*

RAPPRESENTAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Dalla (4.1) segue subito che la quantità di moto totale corrisponde a quella di un punto avente massa totale m , che si muove come il baricentro del sistema:

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j = m \mathbf{v}_B. \quad (4.2)$$

Proposizione 10. *(teorema del centro di massa) Il baricentro di un sistema di N punti si muove come un punto materiale di massa m su cui agisce la risultante \mathbf{R} delle forze che agiscono sui singoli punti:*

$$m \mathbf{a}_B = \mathbf{R}. \quad (4.3)$$

Dimostrazione. Sia $t \rightarrow (\mathbf{x}_1(t) \dots \mathbf{x}_N(t))$ una soluzione delle equazioni di Newton (1.6). Derivando (4.2) si ottiene

$$m\mathbf{a}_B = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{a}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j.$$

□

SCOMPOSIZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A UN POLO Q

Il momento angolare totale rispetto ad un polo $Q \in \mathbb{E}^3$ si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{M}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m\mathbf{v}_B + \mathbf{M}^{(B)}, \quad \mathbf{M}^{(B)} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B). \quad (4.4)$$

La prima corrisponde al momento angolare rispetto a Q di un punto di massa m che si muove come il baricentro del sistema. La seconda corrisponde al momento angolare nel sistema nel riferimento del baricentro e non dipende dalla scelta del polo Q .

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m_j \mathbf{v}_j = \\ &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_j + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m\mathbf{v}_B. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_B = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = 0,$$

da cui segue la (4.4).

□

Osservazione 4. Se scriviamo \mathbf{M}_Q nel riferimento del baricentro il primo addendo in (4.4) si annulla. Quindi in tale riferimento il momento angolare non dipende dalla scelta del polo.

SCOMPOSIZIONE DEL MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE RISPETTO A UN POLO Q

Il momento risultante delle forze rispetto ad un polo $Q \in \mathbb{E}^3$ si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{N}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{R} + \mathbf{N}^{(B)}, \quad \mathbf{N}^{(B)} = \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times (\mathbf{F}_j - m_j \mathbf{a}_B) \quad (4.5)$$

la prima corrisponde al momento rispetto al polo Q della forza risultante \mathbf{R} agente su un punto di massa m che si muove come il baricentro B del sistema. La seconda corrisponde al momento risultante delle forze nel riferimento del baricentro e non dipende dalla scelta del polo Q .

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_Q &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{F}_j = \\ &= \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{F}_j + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{a}_B = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = m (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = 0$$

da cui segue la (4.5). □

Osservazione 5. *Se scriviamo \mathbf{N}_Q nel riferimento del baricentro il primo addendo in (4.5) si annulla per la Proposizione 10. Quindi in tale riferimento il momento risultante delle forze non dipende dalla scelta del polo.*

SCOMPOSIZIONE DELL'ENERGIA CINETICA

L'energia cinetica del sistema si può scomporre come somma di due componenti

$$T = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \quad (\text{teorema di König}). \quad (4.6)$$

la prima corrisponde all'energia cinetica di un punto materiale di massa m che si muove come il baricentro del sistema, la seconda corrisponde all'energia cinetica del sistema nel riferimento del baricentro. Questo risultato è noto come teorema di König.

Dimostrazione.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_B \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^N m_j \right) \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{v}_B.$$

Inoltre il secondo addendo a destra è nullo. \square

4.2 Forze interne e forze esterne

Scomponiamo la forza $\vec{\mathbf{F}}_i$ che agisce sul punto P_i come somma vettoriale di 2 contributi: $\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$. Il vettore $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$ si chiama **forza interna** ed è la somma delle forze che gli altri punti del sistema esercitano su P_i ; $\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}$ è la somma delle altre forze e si chiama **forza esterna**.

Assumiamo che $\vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i, t)$, cioè dipende solo dallo stato del punto P_i .

Ipotesi sulle forze interne (*forze di tipo classico*):

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}(\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\mathbf{F}}_{ij}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{x}}_j), \quad (4.7)$$

cioè le $\vec{\mathbf{F}}_i^{(I)}$ sono puramente posizionali e sono somma vettoriale di interazioni a due corpi. Inoltre assumiamo che valgano le seguenti proprietà:

1. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji} = 0, \quad \forall i, j,$
2. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} \times \vec{\mathbf{r}}_{ij} = 0, \text{ con } \vec{\mathbf{r}}_{ij} = \vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_j,$
3. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} = f_{ij}(\rho_{ij}) \frac{\vec{\mathbf{r}}_{ij}}{\rho_{ij}}, \text{ con } \rho_{ij} = |\vec{\mathbf{r}}_{ij}|.$

Osserviamo che si ha $f_{ij} = f_{ji}$.

Osservazione 6. *Queste ipotesi sulle forze sono caratteristiche della Meccanica Classica: la proprietà 1. corrisponde al principio di azione e reazione.*

Con queste ipotesi si dimostra che la risultante e il momento risultante delle forze interne (rispetto a qualunque polo Q) sono nulli. Infatti

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{R}}^{(I)} &= \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji}) = \vec{\mathbf{0}}, \\ \vec{\mathbf{N}}_Q^{(I)} &= \sum_{i=1}^N (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} + (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ji} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (P_i - P_j) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \vec{\mathbf{0}}.\end{aligned}$$

4.3 Le equazioni cardinali

BILANCIO DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} \quad (4.8)$$

Dimostrazione. Basta derivare la formula che definisce \mathbf{M}_Q . \square

Con le ipotesi sulle forze interne fatte nella sezione precedente, le relazioni (4.3), (4.8) si possono scrivere

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{R}^{(E)} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q &= \mathbf{N}_Q^{(E)} - \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} \end{cases} \quad (4.9)$$

Le (4.9) si chiamano **equazioni cardinali** della dinamica.

4.4 Sistemi di forze equivalenti

Consideriamo due sistemi di forze applicate:

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1) \dots (\vec{\mathbf{F}}_m, P_m)\}, \quad \mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{G}}_1, Q_1) \dots (\vec{\mathbf{G}}_m, Q_m)\}.$$

Definizione 6. \mathcal{F} e \mathcal{G} si dicono *equivalenti* se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo O qualunque.

Notiamo che se i sistemi \mathcal{F} e \mathcal{G} hanno la stessa risultante ($\vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{F}} = \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{G}}$) e lo stesso momento risultante delle forze rispetto a un polo O fissato ($\vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{F}} = \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{G}}$), allora i

due sistemi hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un qualunque polo O' :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{N}}_{O'}^{\mathcal{F}} &= \sum_{h=1}^m (P_h - O') \times \vec{\mathbf{F}}_h = \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{F}} + (O - O') \times \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{F}} = \\ &= \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{G}} + (O - O') \times \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{G}} = \sum_{k=1}^n (Q_k - O') \times \vec{\mathbf{G}}_k = \vec{\mathbf{N}}_{O'}^{\mathcal{G}}\end{aligned}$$

Proposizione 11. *Ogni sistema di forze applicate $\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1) \dots (\vec{\mathbf{F}}_m, P_m)\}$ è equivalente ad un sistema costituito da una forza applicata ad un punto qualunque Q , e da una coppia di forze, dipendente dalla scelta di Q .*

Dimostrazione. Sia $\vec{\mathbf{R}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$ la risultante delle forze ed $\vec{\mathbf{N}}_Q = \sum_i (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_i$ il momento risultante rispetto ad un polo fissato $Q \in \mathbb{E}^3$. Considero il sistema di forze

$$\mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{R}}, Q), (\vec{\mathbf{F}}, Q_1), (-\vec{\mathbf{F}}, Q_2)\}$$

con $Q_1, Q_2 \in \mathbb{E}^3$, $\vec{\mathbf{F}} \in \mathbb{V}^3$ scelti in modo che il momento della coppia¹ $(Q_1 - Q_2) \times \vec{\mathbf{F}}$ sia uguale a $\vec{\mathbf{N}}_Q$. Si verifica facilmente che \mathcal{G} è equivalente a \mathcal{F} . □

Osserviamo che nelle equazioni cardinali (4.9) appaiono solamente la risultante ed il momento risultante delle forze (esterne), quindi considerando un sistema equivalente di forze otteniamo le stesse equazioni differenziali.

ESEMPIO: consideriamo il caso della forza di gravità

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_i, P_i)\}_{i=1 \dots N}, \quad \vec{\mathbf{F}}_i = -m_i g \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Il sistema di forze \mathcal{F} è equivalente a $\mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{R}}, B)\}$ formato da un'unica forza $\vec{\mathbf{R}} = -mg \hat{\mathbf{e}}_3$ applicata al baricentro B del sistema, infatti il momento risultante delle forze di gravità rispetto al baricentro è nullo.

4.5 Sistemi conservativi

Proposizione 12. *Le forze interne di tipo classico ammettono l'energia potenziale*

$$V^{(I)}(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(\rho_{ij}), \quad \text{con} \quad \frac{d}{d\rho_{ij}} V_{ij}(\rho_{ij}) = -f_{ij}(\rho_{ij}) \quad (4.10)$$

¹Il momento di una coppia di forze non dipende dalla scelta del polo, infatti

$$(Q_1 - Q) \times \vec{\mathbf{F}} - (Q_2 - Q) \times \vec{\mathbf{F}} = (Q_1 - Q_2) \times \vec{\mathbf{F}}, \quad \forall Q \in \mathbb{E}^3.$$

Dimostrazione. Dalla relazione $f_{ij} = f_{ji}$ segue che V_{ij} e V_{ji} possono differire solo per una costante additiva. Si ha quindi

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)} &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \nabla_{\mathbf{x}_k} V_{ji} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \nabla_{\mathbf{x}_k} V_{ki} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{dV_{ki}}{d\rho_{ki}} \nabla_{\mathbf{x}_k} \rho_{ki} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N f_{ki} \frac{\mathbf{r}_{ki}}{\rho_{ki}} = -\mathbf{F}_k^{(I)}.\end{aligned}$$

□

Osservazione 7. Possiamo anche assumere che $V_{ij} = V_{ji}$. In questo caso si ha

$$V^{(I)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N V_{ij}(\rho_{ij}).$$

Osservazione 8. La funzione

$$V_k^{(I)}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N V_{kj}(\rho_{kj})$$

soddisfa la relazione

$$\mathbf{F}_k = -\nabla_{\mathbf{x}_k} V_k^{(I)},$$

ma la somma $\sum_{k=1}^N V_k^{(I)}$ non va bene come energia potenziale delle forze interne, perchè ci dà un contributo doppio delle forze.

Introduciamo la potenza delle forze interne e esterne, denotate rispettivamente con

$$\Pi^{(I)} = \sum_{j=1}^N \vec{\mathbf{F}}_j^{(I)} \cdot \vec{\mathbf{v}}_j, \quad \Pi^{(E)} = \sum_{j=1}^N \vec{\mathbf{F}}_j^{(E)} \cdot \vec{\mathbf{v}}_j.$$

Con questa notazione si ottiene

$$\Pi = \Pi^{(I)} + \Pi^{(E)}.$$

Abbiamo la seguente

Proposizione 13. (teorema dell'energia cinetica) Sia $t \rightarrow \mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t) \dots \mathbf{x}_N(t))$ una soluzione delle equazioni di Newton (1.6). Allora

$$\dot{T} = \Pi.$$

Se le forze interne sono di tipo classico, con energia potenziale $V^{(I)}$, allora

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)}) = \Pi^{(E)}. \quad (4.11)$$

Dimostrazione.

$$\Pi = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_j = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j \right) = \dot{T}.$$

Siccome le forze interne ammettono l'energia potenziale $V^{(I)}$, abbiamo

$$\frac{d}{dt} V^{(I)} = \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_i} V^{(I)} \cdot \mathbf{v}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i^{(I)} \cdot \mathbf{v}_i = -\Pi^{(I)},$$

da cui segue (4.11). □

Definizione 7. La forza \mathbf{F}_j che agisce sul punto P_j si dice *conservativa* se è puramente posizionale, cioè $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x})$, e se esiste una funzione scalare $V_j(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V_j$.

Definizione 8. Un sistema meccanico di N punti materiali si dice **conservativo** se le forze $\vec{\mathbf{F}}_j$ che agiscono sui punti P_j sono puramente posizionali e se esiste una funzione scalare $V(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V$, per $j = 1 \dots N$. La funzione V si chiama *energia potenziale del sistema*.

Osservazione 9. Nei sistemi conservativi le forze agenti sui singoli punti si possono ricavare dall'unica funzione scalare V . Si dice anche che il sistema ammette *potenziale monogenico*.

Se le forze esterne $\vec{\mathbf{F}}_j^{(E)}$ sono tutte conservative (quindi $\vec{\mathbf{F}}_j^{(E)} = \vec{\mathbf{F}}_j^{(E)}(\mathbf{x}_j)$ ed esiste $V_j(\mathbf{x}_j)$ tale che $\vec{\mathbf{F}}_j^{(E)} = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V_j$) allora la funzione

$$V^{(E)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N V_j(\mathbf{x}_j)$$

soddisfa

$$\mathbf{F}_j^{(E)} = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V^{(E)}, \quad j = 1 \dots N.$$

In questo caso introduciamo l'energia potenziale del sistema

$$V(\mathbf{x}) = V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x})$$

e la sua **energia totale**

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x}).$$

Proposizione 14. (*conservazione dell'energia*) *L'energia totale di un sistema di N punti materiali soggetto a forze interne di tipo classico e a forze esterne conservative si conserva.*

Dimostrazione. Usando la (4.11) si ha

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)} + V^{(E)}) = \Pi^{(E)} + \frac{d}{dt}V^{(E)} = 0,$$

infatti

$$\frac{d}{dt}V^{(E)} = \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_i} V^{(E)} \cdot \mathbf{v}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}_i^{(E)} \cdot \mathbf{v}_i = -\Pi^{(E)}.$$

□

4.6 Similitudine meccanica

Se le forze sono conservative, in alcuni casi è possibile ottenere informazioni sulle soluzioni senza risolvere le equazioni del moto, tramite considerazioni sul riscaldamento delle masse, del tempo e delle posizioni dei corpi. Mostriamo qui alcuni esempi dell'uso di tale procedimento nel caso di un solo punto materiale: questo può essere facilmente generalizzato al caso di più punti.

Esempio 2. (*riscaldamento di massa e tempo*)

Se la curva $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = -\nabla V(\mathbf{x}(t)), \quad (4.12)$$

allora, scelti $\tau \neq 0, \mu > 0$ e posto $m_1 = \mu m$, la curva

$$t_1 \mapsto \mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}(t_1/\tau)$$

soddisfa

$$m_1 \frac{d^2}{dt_1^2} \mathbf{x}_1(t_1) = -\frac{\mu}{\tau^2} \nabla V(\mathbf{x}_1(t_1)),$$

infatti

$$\frac{d}{dt_1} \mathbf{x}_1(t_1) = \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t_1/\tau), \quad \frac{d^2}{dt_1^2} \mathbf{x}_1(t_1) = \frac{1}{\tau^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t_1/\tau).$$

Se assumiamo che

$$\mu = \tau^2,$$

allora la curva $t_1 \mapsto \mathbf{x}_1(t_1)$, che corrisponde a $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ col riscaldamento del tempo $t_1 = \tau t$, risolve un'equazione simile a (4.12), ottenuta riscaldando la massa tramite la relazione $m_1 = \mu m$.

Per l'esempio successivo ci servono i seguenti risultati.

Definizione 9. Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, si dice **omogenea di grado α** se si ha

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^\alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall \lambda > 0, \forall \mathbf{x} \in U \quad (4.13)$$

Teorema 2. (Eulero) Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ omogenea di grado α . Allora

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}). \quad (4.14)$$

Dimostrazione. Basta derivare l'equazione (4.13) rispetto a λ e valutare l'equazione che ne risulta per $\lambda = 1$. □

Proposizione 15. Il gradiente ∇f di una funzione omogenea f di grado α è omogeneo di grado $\alpha - 1$:

$$\nabla f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^{\alpha-1} \nabla f(\mathbf{x}),$$

Dimostrazione. Verifichiamo questa proprietà per le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}_i}(\lambda \mathbf{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(\lambda(\mathbf{x} + \frac{h}{\lambda} \mathbf{e}_i)) - V(\lambda \mathbf{x})}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda^{\alpha-1} [V((\mathbf{x} + \frac{h}{\lambda} \mathbf{e}_i)) - V(\mathbf{x})]}{h/\lambda} = \lambda^{\alpha-1} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Esempio 3. (riscaldamento della lunghezza con potenziali omogenei)

Consideriamo un campo di forze conservativo con energia potenziale V . Assumiamo inoltre che V sia omogenea di grado α . Per la Proposizione 15 il gradiente ∇V è omogeneo di grado $\alpha - 1$. Assumiamo che la curva $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ soddisfi l'equazione

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = -\nabla V(\mathbf{x}(t)) \quad (4.15)$$

e consideriamo la curva

$$t \mapsto \mathbf{x}_1(t) = \lambda \mathbf{x}(t), \quad \lambda > 0.$$

Quest'ultima risolve l'equazione

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}_1(t) &= m \lambda \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = -\lambda \nabla V(\mathbf{x}(t)) \\ &= -\lambda^{2-\alpha} \nabla V(\lambda \mathbf{x}(t)) = -\lambda^{2-\alpha} \nabla V(\mathbf{x}_1(t)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Scelto $\tau \neq 0$, consideriamo la curva

$$t_1 \mapsto \mathbf{x}_2(t_1) = \mathbf{x}_1(t_1/\tau) = \lambda \mathbf{x}(t_1/\tau).$$

Dalla (4.16) e dall'esempio precedente si ottiene

$$m \frac{d^2}{dt_1^2} \mathbf{x}_2(t_1) = \frac{m}{\tau^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}_1(t_1/\tau) = -\frac{\lambda^{2-\alpha}}{\tau^2} \nabla V(\mathbf{x}_1(t_1/\tau)) = -\frac{\lambda^{2-\alpha}}{\tau^2} \nabla V(\mathbf{x}_2(t_1)).$$

Quindi, se

$$\lambda^{2-\alpha} = \tau^2, \quad (4.17)$$

tutte le orbite riscalate risolvano la stessa equazione differenziale (4.15).

Osservazione 10. Se $\alpha = 2$ (caso dell'oscillatore armonico) dalla (4.17) si ha $\tau^2 = 1$ per ogni $\lambda > 0$. Se abbiamo un'orbita periodica $\mathbf{x}_p(t)$ di periodo T allora esiste tutta una famiglia a 1 parametro di orbite $\{\lambda \mathbf{x}_p(t)\}$, $\lambda > 0$ che hanno lo stesso periodo.

Osservazione 11. Se $\alpha = -1$ (caso del problema di Keplero, vedi Sezione 3.6), dalla (4.17) si ha $\tau^2 = \lambda^3$. Se $\mathbf{x}_p(t)$ è una soluzione periodica, cioè un'orbita ellittica, di periodo T allora la famiglia a un parametro $\{\lambda \mathbf{x}_p(t/\tau)\}$, con $\tau^2 = \lambda^3$, risolve la stessa equazione. Il rapporto tra i periodi di due soluzioni $\lambda_1 \mathbf{x}_p(t/\tau_1)$, $\lambda_2 \mathbf{x}_p(t/\tau_2)$ di questa famiglia è

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{3/2} = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{3/2}, \quad (4.18)$$

dove a_1, a_2 sono i semiassi maggiori delle 2 orbite. La relazione (4.18) corrisponde alla terza legge di Keplero.

Esempio 4. (trasformazioni di scala generali con potenziali omogenei)

Più in generale posso considerare trasformazioni di scala

$$t \rightarrow t_1 = \tau t, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}, \quad m \rightarrow m_1 = \mu m.$$

Se $\mathbf{x}(t)$ soddisfa (4.15) con V omogenea di grado α , allora $\mathbf{x}_1(t_1) = \lambda \mathbf{x}(t_1/\tau)$ soddisfa

$$m_1 \frac{d^2}{dt_1^2} \mathbf{x}_1(t_1) = -\nabla V(\mathbf{x}_1(t_1))$$

solo se

$$\mu \lambda^{2-\alpha} = \tau^2. \quad (4.19)$$

4.7 Alcuni risultati sul problema degli N corpi

Consideriamo N punti materiali $P_1 \dots P_N$ di masse $m_1 \dots m_N$ soggetti soltanto alla loro interazione mutua, dovuta a forze interne di tipo classico. Sia $V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$ l'energia potenziale di tali forze, per cui il moto dei punti soddisfa le equazioni

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N).$$

Introduciamo il **momento di inerzia** del sistema rispetto al baricentro \mathbf{x}_B :

$$I(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N) = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2.$$

Dimostriamo che il momento di inerzia si può scrivere in termini delle distanze mutue tra i punti:

Proposizione 16. *Vale la seguente formula*

$$I = \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2. \quad (4.20)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_i m_j (|\mathbf{x}_i|^2 + |\mathbf{x}_j|^2 - 2\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (m - m_i) |\mathbf{x}_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (m - m_j) |\mathbf{x}_j|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\ &= m \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i=1}^N m_i^2 |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) = \\ &= m \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j \right) \cdot \left(\mathbf{x}_i - \frac{1}{m} \sum_{h=1}^N m_h \mathbf{x}_h \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^N \frac{m_i m_j}{m} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m^2} \sum_{j,h=1}^N m_j m_h \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_h = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \frac{2}{m} \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) + \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^N m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j). \end{aligned}$$

□

Osservazione 12. *Il risultato precedente è utile per interpretare alcune questioni sul moto degli N corpi in termini del moto delle distanze mutue (vedi Lagrange 1772, Albouy 1991).*

A meno di applicare una trasformazione galileiana, possiamo assumere che il baricentro degli N punti sia fermo nell'origine: $\mathbf{x}_B = \mathbf{0}$. Dimostriamo la seguente

Proposizione 17.

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i$$

Dimostrazione. Basta derivare due volte $I(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$ rispetto a t ed usare le equazioni di Newton:

$$\dot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i, \quad \ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i.$$

□

Corollario 1. *(identità di Lagrange) Se le forze sono conservative e l'energia potenziale V è omogenea di grado α allora*

$$\ddot{I} = 4T - 2 \sum \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{x}_i = 4T - 2\alpha V = 4E - 2(\alpha + 2)V,$$

cioè \ddot{I} dipende solo dalla posizione dei punti e dall'energia totale E .

Capitolo 5

Il corpo rigido

Introduciamo le proprietà cinematiche e dinamiche dei corpi rigidi, nel caso discreto e continuo. Trattiamo in particolare la descrizione di Poincot del moto di un corpo rigido con un punto fisso O nel caso in cui il momento delle forze esterne rispetto ad O sia nullo (moti per inerzia).

5.1 Corpi rigidi discreti

Un **corpo rigido**, denotato con \mathfrak{C} , è un sistema di N punti materiali P_1, \dots, P_N che mantengono invariate le loro distanze mutue durante il moto.

Fissato un riferimento $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$, i punti P_j sono individuati dai vettori $P_j - O$, con coordinate \mathbf{x}_j nella base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Le distanze mutue

$$\rho_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| = c_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

tra i punti di \mathfrak{C} sono costanti.

ESEMPIO: due punti materiali vincolati rigidamente che si muovono in \mathbb{R}^3 .

L'insieme delle configurazioni ammissibili formano una sottovarietà $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^6$ di dimensione 5. Infatti le configurazioni ammissibili $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ sono definite da $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$, con

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2 - \ell^2, \quad \ell > 0.$$

Poniamo $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Il vettore

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 2((x_1 - x_2), (y_1 - y_2), (z_1 - z_2), (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1))$$

è non nullo nei punti $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ tali che $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$. Ne segue che l'insieme

$$\mathcal{C} = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^6 : \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0\}$$

è una sottovarietà di \mathbb{R}^6 di dimensione $6 - 1 = 5$.

Quindi il vincolo di rigidità, almeno in questo semplice caso, è olonomo.

Definizione 10. Diciamo che un sistema di riferimento $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ è **solidale** al corpo rigido \mathfrak{C} se i punti P_j del corpo hanno tutti velocità nulla rispetto a Σ' , cioè se le coordinate di tutti i punti P_j sono costanti in Σ' .

Costruiamo esplicitamente un sistema di riferimento solidale.

Se tutti i punti di \mathfrak{C} sono allineati ne prendiamo due, P_1 e P_2 e poniamo $O' = P_1$, $\hat{e}'_1 = (P_2 - P_1)/\rho_{12}$, $\hat{e}'_2 \in \hat{e}'_1^\perp$, $\hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$. Le coordinate di ogni altro punto P_j di \mathfrak{C} sono determinate univocamente dalle costanti c_{1j}, c_{2j} .

Se esistono tre punti, $P_1, P_2, P_3 \in \mathfrak{C}$ non allineati poniamo $O' = P_1$, $\hat{e}'_1 = (P_2 - P_1)/\rho_{12}$, $\hat{e}'_2 \in \pi(P_1, P_2, P_3)$ (il piano generato dai tre punti) con $\hat{e}'_2 \in \hat{e}'_1^\perp$ e $(P_3 - P_1) \cdot \hat{e}'_2 > 0$. Infine $\hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$.

Osserviamo che le coordinate di ogni altro punto P_j del corpo sono costanti¹ nel riferimento $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$. Quindi ci basta conoscere la posizione di P_1, P_2, P_3 per determinare quella degli altri punti del corpo.

Proposizione 18. Se \mathfrak{C} ha almeno tre punti non allineati, le configurazioni possibili formano una sottovarietà \mathcal{C} di \mathbb{R}^{3N} diffeomorfa a $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

Dimostrazione. Sia $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ un riferimento solidale a \mathfrak{C} , costruito ad esempio come descritto sopra con tre punti del corpo non allineati.

Dato che le coordinate \mathbf{x}'_j dei punti P_j sono costanti in Σ' , assumendo queste note a priori, per determinare le coordinate dei punti del corpo in Σ ci basta determinare la posizione del sistema di riferimento Σ' rispetto a Σ . Questa è determinata una volta note le coordinate dell'origine O' ed i coseni direttori $R_{ji} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j$ dei versori $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ rispetto a $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$. Per le proprietà degli \hat{e}'_i, \hat{e}_j la matrice $R = (R_{ji})$ è ortogonale.

Definiamo quindi una mappa

$$\phi : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$$

tramite

$$\phi(\mathbf{x}_{O'}, R) = (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_N). \quad (5.1)$$

Nella (5.1) $\mathbf{x}_{O'}$ descrive le coordinate di $O' - O$ nella base $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, $\mathbf{x}'_h, h = 1 \dots N$ sono le coordinate (costanti) dei vettori $P_j - O'$ nella base $\mathcal{B}' =$

¹Osserviamo anche che le coordinate di ogni altro punto P_j ($j \geq 4$) del corpo non sono univocamente determinate dalle costanti c_{1j}, c_{2j}, c_{3j} in quanto l'intersezione non vuota delle 3 sfere di centro P_i e raggio c_{ij} , $i = 1, 2, 3$ dà luogo genericamente a due punti. Comunque, note le coordinate \mathbf{x}'_j dei punti P_j in Σ' , la continuità del moto dei P_j implica che le loro coordinate in Σ' siano costanti nel tempo.

$\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ ed R è l'inversa della matrice del cambiamento di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' (cioè ha componenti $R_{ji} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$).

L'immagine della mappa ϕ descrive tutte le possibili coordinate dei vettori $P_h - O$ nella base \mathcal{B} in quanto $\mathbf{x}_{O'} \in \mathbb{R}^3$ ed $R \in SO(3)$ descrivono tutte le possibili posizioni di un sistema di riferimento Σ' solidale a \mathcal{C} (costruito ad esempio come descritto sopra, utilizzando tre punti del corpo non allineati).

Osserviamo che ϕ è iniettiva, infatti se

$$\mathbf{x}_{O'}^{(1)} + R_1 \mathbf{x}'_h = \mathbf{x}_{O'}^{(2)} + R_2 \mathbf{x}'_h, \quad \forall h$$

allora

$$R_1(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j) = R_2(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j), \quad R_1(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_k) = R_2(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_k)$$

con $\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j, \mathbf{x}'_k$ vettori linearmente indipendenti. Ne segue che $R_1(R_2)^{-1}$, che è un elemento di $SO(3)$, ha due autovettori indipendenti relativi all'autovalore 1, dunque $R_1 = R_2$ e, di conseguenza, $\mathbf{x}_{O'}^{(1)} = \mathbf{x}_{O'}^{(2)}$.

La mappa ϕ e la sua inversa, definita sull'immagine $\phi(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$, sono differenziabili perché lineari. Quindi ϕ è un diffeomorfismo sulla sua immagine. \square

La varietà delle configurazioni di un corpo rigido con almeno tre punti non allineati ha dimensione 6, infatti vale il seguente risultato.

Proposizione 19. *Il gruppo $O(3)$ è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^9 di dimensione 3.*

Dimostrazione. Considero la mappa $\Psi : \mathbb{R}^9 \mapsto \mathbb{R}^6$ le cui componenti $\Psi_{ij}, 1 \leq i < j \leq 3$ sono definite da

$$\Psi_{ij}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}) = \sum_{h=1}^3 a_{hi} a_{hj} - \delta_{ij},$$

Posto $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33})$, abbiamo

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 0 & 0 & 2a_{21} & 0 & 0 & 2a_{31} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11} & 0 & a_{22} & a_{21} & 0 & a_{32} & a_{31} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{11} & a_{23} & 0 & a_{21} & a_{33} & 0 & a_{31} \\ 0 & 2a_{12} & 0 & 0 & 2a_{22} & 0 & 0 & 2a_{32} & 0 \\ 0 & a_{13} & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{22} & 0 & a_{33} & a_{32} \\ 0 & 0 & 2a_{13} & 0 & 0 & 2a_{23} & 0 & 0 & 2a_{33} \end{bmatrix}$$

$SO(3)$ è una componente connessa di $O(3)$, definita dalle matrici di $O(3)$ con determinante 1. Ne segue che anche $SO(3)$ è una sottovarietà di dimensione 3. \square

Esercizio 4. *Dimostrare che se un corpo rigido è formato da punti allineati, l'insieme delle configurazioni possibili è diffeomorfo a $\mathbb{R}^3 \times S^2$.*

5.2 Proprietà cinematiche di un corpo rigido

5.2.1 Formula fondamentale della cinematica rigida

Definizione 11. *Definiamo la velocità angolare $\vec{\omega}$ di un corpo rigido come quella di minima norma tra le velocità angolari di tutti i sistemi di riferimento solidali rispetto ad un riferimento dato Σ .*

Si presentano due casi:

Proposizione 20. i) *Se \mathfrak{C} ha almeno 3 punti non allineati allora la sua velocità angolare è quella di un qualunque riferimento solidale a \mathfrak{C} .* ii) *Se invece tutti i punti di \mathfrak{C} sono allineati allora la sua velocità angolare è data dalla differenza tra quella di un qualunque riferimento solidale a \mathfrak{C} e la sua componente in direzione dell'allineamento dei punti.*

Dimostrazione. Consideriamo due riferimenti solidali Σ', Σ'' . Denotiamo con $\vec{\omega}, \vec{\omega}'$ le velocità angolari di Σ' rispetto a Σ e di Σ'' rispetto a Σ' rispettivamente. i) La velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ è data da $\vec{\omega} + \vec{\omega}'$. Se P_1, P_2, P_3 sono punti del corpo non allineati, dalla (2.5) applicata a $P_2 - P_1$ e a $P_3 - P_1$ si ha

$$\vec{\omega}' \times (P_2 - P_1) = \vec{0}, \quad \vec{\omega}' \times (P_3 - P_1) = \vec{0}. \quad (5.2)$$

Infatti si ha

$$\frac{d}{dt}(P_2 - P_1) \Big|_{\Sigma'} = \frac{d}{dt}(P_2 - P_1) \Big|_{\Sigma''} + \vec{\omega}' \times (P_2 - P_1),$$

e P_1, P_2 sono solidali sia a Σ' che a Σ'' . La seconda relazione in (5.2) si dimostra in modo analogo. Dalle (5.2) segue che

$$\vec{\omega}' = \vec{0},$$

quindi le velocità angolari di Σ' e Σ'' rispetto a Σ sono le stesse.

ii) Si considerino due punti P_1, P_2 del corpo. Dalla (2.5) abbiamo $\vec{\omega}' \times (P_2 - P_1) = \vec{0}$, quindi le velocità angolari di Σ e Σ' differiscono solo per una componente lungo la direzione di allineamento. □

Definizione 12. *Diciamo che un punto P è solidale ad un corpo rigido \mathfrak{C} se P ha velocità nulla in tutti i riferimenti Σ' solidali a \mathfrak{C} che hanno velocità angolare di minima norma tra tutti i riferimenti solidali a \mathfrak{C} .*

Per quanto detto prima, nel caso in cui \mathfrak{C} abbia tre punti non allineati basta che P abbia velocità nulla in un qualunque riferimento solidale. Se invece tutti i punti di \mathfrak{C} sono allineati basta che P abbia velocità nulla in un riferimento Σ' tale che la sua velocità angolare rispetto a Σ abbia in ogni istante componente nulla nella direzione dell'allineamento dei punti di \mathfrak{C} .

Proposizione 21. *Siano $\vec{x}_h, \vec{x}_k \in \mathbb{V}^3$ le posizioni di due punti P_h, P_k di un corpo rigido \mathcal{C} o ad esso solidali e siano \vec{v}_h, \vec{v}_k le loro rispettive velocità relative a Σ . Se \mathcal{C} è in moto con velocità angolare $\vec{\omega}$ vale la formula*

$$\vec{v}_k = \vec{v}_h + \vec{\omega} \times (P_k - P_h). \quad (5.3)$$

Dimostrazione. Denotando con $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ un sistema di riferimento solidale al corpo, con velocità angolare $\vec{\omega}$ di minima norma, e usando le relazioni (2.6) si ottiene

$$\vec{v}_k - \vec{v}_h = \vec{v}'_k + \vec{\omega} \times (P_k - O') - \vec{v}'_h - \vec{\omega} \times (P_h - O') = \vec{\omega} \times (P_k - P_h),$$

in cui abbiamo usato il fatto che le velocità di P_k, P_h relative a Σ' sono nulle. \square

Concludo che le coordinate delle posizioni e velocità $(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_N)$ di un corpo rigido \mathcal{C} sono determinate ad ogni istante t dalla posizione e velocità di un punto O' solidale al corpo al tempo t , da una matrice $R(t) \in SO(3)$ e dalla velocità angolare $\omega(t)$ di \mathcal{C} :

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{x}_{O'} + R \mathbf{x}'_h, \quad \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_{O'} + \omega \times (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_{O'}).$$

Ad ogni istante t , $R(t)$ è l'inversa della matrice di cambiamento di base da Σ ad un riferimento solidale Σ' .

5.2.2 Campo delle velocità di un moto rigido

Proposizione 22. *Se $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$ è la velocità angolare di un corpo rigido all'istante t , allora esiste un'unica retta $r(t)$, detta **asse istantaneo di rotazione**, composta di punti solidali al corpo che hanno tutti velocità parallela ad $\vec{\omega}(t)$ oppure nulla.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che dati due punti P, Q solidali al corpo, che all'istante t si trovano su una retta parallela ad $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$, si ha

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P - Q) = \vec{v}_Q.$$

Quindi ci basta dimostrare che all'istante t esiste un punto P_0 solidale al corpo con \vec{v}_{P_0} parallela ad $\vec{\omega}$ oppure nulla. L'asse istantaneo di rotazione corrisponderà allora alla retta passante per P_0 e parallelo a $\vec{\omega}$.

Siano O' un punto solidale al corpo e $\Pi_{O'}$ il piano ortogonale ad $\vec{\omega}$ e passante per O' . Determiniamo un punto $P_0 \in \Pi_{O'}$ solidale al corpo e tale che $\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = \vec{0}$. Moltiplichiamo vettorialmente per $\vec{\omega}$ la formula fondamentale relativa a P_0 e O' :

$$\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times (P_0 - O')) \times \vec{\omega} = \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + |\vec{\omega}|^2 (P_0 - O'),$$

poiché $(P_0 - O') \cdot \vec{\omega} = 0$. Imponendo che la velocità di P_0 sia parallela ad $\vec{\omega}$ oppure nulla otteniamo

$$P_0 - O' = -\frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega},$$

che individua il punto P_0 cercato. Dalla dimostrazione costruttiva della sua esistenza segue anche l'unicità dell'asse istantaneo di rotazione. \square

Il seguente risultato descrive globalmente il campo delle velocità di un moto rigido:

Proposizione 23. *Le velocità dei punti solidali al corpo rigido hanno una simmetria cilindrica rispetto all'asse istantaneo di rotazione.*

Dimostrazione. Assumiamo che $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ all'istante t e consideriamo l'asse istantaneo di rotazione $r = r(t)$. Per quanto mostrato nella Proposizione 22, ci basta mostrare che tale simmetria sussiste per i punti di un piano ortogonale all'asse r . Dato un punto $P_1 \notin r$ definisco $P_0 = r \cap \Pi_{P_1}$ con Π_{P_1} il piano passante per P_1 e ortogonale a r . Dato un punto P_2 sulla circonferenza di centro P_0 , raggio $|P_1 - P_0|$ e ortogonale a $\vec{\omega}$ considero l'operatore \mathcal{R} di rotazione attorno all'asse r tale che

$$P_2 = P_0 + \mathcal{R}(P_1 - P_0).$$

Per la (5.3) si ha

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times (P_1 - P_0), \quad \vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times (P_2 - P_0). \quad (5.4)$$

Siccome \vec{v}_{P_0} e $\vec{\omega}$ sono paralleli all'asse,

$$\mathcal{R}\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times \mathcal{R}(P_1 - P_0) = \vec{v}_{P_2}.$$

Inoltre dalla prima equazione in (5.4) segue che

$$\vec{v}_{P_1} \cdot (P_1 - P_0) = 0$$

poiché $\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = \vec{0}$ e $(P_1 - P_0) \cdot \vec{\omega} = 0$.

Quindi, in coordinate cilindriche con asse $r(t)$, la componente radiale della velocità dei punti solidali al corpo rigido è nulla.

Consideriamo due punti P, Q qualunque solidali al corpo. Scomponiamo le loro velocità \vec{v}_P, \vec{v}_Q come segue:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{\parallel} + \vec{v}_P^{\perp} \quad \vec{v}_Q = \vec{v}_Q^{\parallel} + \vec{v}_Q^{\perp} \quad (5.5)$$

dove

$$\vec{v}_P^{\parallel} = \frac{(\vec{v}_P \cdot \vec{\omega})}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}, \quad \vec{v}_P^{\perp} = \vec{v}_P - \vec{v}_P^{\parallel}, \quad \vec{v}_Q^{\parallel} = \frac{(\vec{v}_Q \cdot \vec{\omega})}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}, \quad \vec{v}_Q^{\perp} = \vec{v}_Q - \vec{v}_Q^{\parallel}.$$

Dalla formula fondamentale (5.3) segue che

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_Q \cdot \vec{\omega}, \quad (5.6)$$

quindi le componenti \vec{v}_P^{\parallel} , \vec{v}_Q^{\parallel} lungo l'asse istantaneo di rotazione sono le stesse.

Da (5.3), $\vec{v}_P^{\parallel} = \vec{v}_Q^{\parallel}$ e (5.5) segue anche che

$$\vec{v}_P^{\perp} = \vec{v}_Q^{\perp} + \vec{\omega} \times (P - Q).$$

Nel caso particolare in cui Q sia un punto dell'asse istantaneo di rotazione si ha $\vec{v}_Q^{\perp} = \vec{0}$, per cui

$$\vec{v}_P^{\perp} = \vec{\omega} \times (P - Q).$$

Viste queste proprietà delle velocità dei punti di un corpo rigido, si parla di **atto di moto elicoidale**. □

5.2.3 Moti rigidi piani

Un moto rigido si dice **piano** se la velocità angolare $\vec{\omega}$ ha direzione costante e tutti i punti solidali al corpo hanno velocità ortogonale a tale direzione, cioè

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0.$$

Posso dunque fissare un piano di riferimento Π ortogonale ad $\vec{\omega}$ in cui studiare il moto. Definisco il **centro istantaneo di rotazione** come il punto $C_0 = r(t) \cap \Pi$.

Proposizione 24. (Teorema di Chasles) *In un moto rigido piano il centro istantaneo di rotazione C_0 si trova sulla retta normale alla velocità di ciascuno dei punti solidali al corpo distinti da C_0 .*

Dimostrazione. Sia C_0 il centro istantaneo di rotazione. Osservo che $\vec{v}_{C_0} = \vec{0}$, poiché $\vec{v}_{C_0} \times \vec{\omega} = \vec{0}$, $\vec{v}_{C_0} \cdot \vec{\omega} = 0$. Quindi

$$(P - C_0) \cdot \vec{v}_P = (P - C_0) \cdot (\vec{v}_{C_0} + \vec{\omega} \times (P - C_0)) = 0$$

per ogni punto P solidale al corpo. □

5.2.4 Operatore di inerzia

Per studiare il moto di un corpo rigido \mathfrak{C} è utile introdurre l'**operatore di inerzia** $\mathfrak{I}_Q : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$ rispetto al polo $Q \in \mathbb{E}^3$, definito da

$$\mathfrak{I}_Q \vec{u} = \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - Q)], \quad \vec{u} \in \mathbb{V}^3.$$

Proposizione 25. Per ogni scelta del polo Q l'applicazione bilineare

$$\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{v} \in \mathbb{R}$$

è simmetrica e, se il corpo \mathfrak{C} ha almeno tre punti non allineati, è definito positiva.

Dimostrazione. Dalle proprietà del prodotto misto e dalla simmetria del prodotto scalare abbiamo la simmetria dell'operatore \mathfrak{I}_Q , infatti

$$\vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{v} = \sum_{h=1}^N m_h [\vec{u} \times (P_h - Q)] \cdot [\vec{v} \times (P_h - Q)]$$

Similmente si ha

$$\vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{u} = \sum_{h=1}^N m_h |\vec{u} \times (P_h - Q)|^2$$

e, se ci sono tre punti non allineati, almeno un addendo della sommatoria è > 0 . Se tutti i punti del corpo sono allineati ed $\hat{e} \in \mathbb{V}^3$, $|\hat{e}| = 1$, corrisponde alla direzione della retta di allineamento, allora $\hat{e} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e} = 0$ se Q sta su tale retta. \square

SCOMPOSIZIONE DELL'OPERATORE DI INERZIA

Si verifica facilmente che

$$\mathfrak{I}_Q \vec{u} = \mathfrak{I}_B \vec{u} + m(B - Q) \times [\vec{u} \times (B - Q)], \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}^3, \quad (5.7)$$

infatti

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_Q \vec{u} &= \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - Q)] = \\ &= \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] + \sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] + \\ &+ \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (B - Q)] + \sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (B - Q)] \end{aligned}$$

e si ha

$$\sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] = \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (B - Q)] = \vec{0}.$$

Dati un punto $Q \in \mathbb{E}^3$ ed una direzione $\hat{e} \in \mathbb{V}^3$, $|\hat{e}| = 1$, definiamo **momento di inerzia** relativo all'asse $Q\hat{e}$, passante da Q e parallelo a \hat{e} , la quantità

$$I_{Q\hat{e}} = \hat{e} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e}.$$

Osservo che se Q' è un punto dell'asse $Q\hat{e}$ si ha

$$I_{Q'\hat{e}} = \sum_{h=1}^N m_h |\hat{e} \times (P_h - Q')|^2 = \sum_{h=1}^N m_h |\hat{e} \times [(P_h - Q) + (Q - Q')]|^2 = I_{Q\hat{e}}.$$

Abbiamo il seguente

Proposizione 26. (Huygens-Steiner) *Il momento di inerzia $I_{B\hat{e}}$ rispetto all'asse $B\hat{e}$ ha la seguente proprietà:*

$$I_{B\hat{e}} = \min_{Q \in \mathbb{E}^3} I_{Q\hat{e}}.$$

Dimostrazione. Dalla (5.7) segue che $I_{Q\hat{e}} = I_{B\hat{e}} + m |\hat{e} \times (B - Q)|^2$. □

MATRICE DI INERZIA

Fissata una base, $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ l'operatore di inerzia \mathfrak{J}_Q si scrive tramite la seguente matrice

$$I_Q = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}, \quad I_{ij} = \hat{e}_i \cdot \mathfrak{J}_Q \hat{e}_j.$$

Più precisamente si ha

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{h=1}^N m_h (y_h^2 + z_h^2); & I_{22} &= \sum_{h=1}^N m_h (x_h^2 + z_h^2); & I_{33} &= \sum_{h=1}^N m_h (x_h^2 + y_h^2); \\ I_{12} &= - \sum_{h=1}^N m_h x_h y_h; & I_{13} &= - \sum_{h=1}^N m_h x_h z_h; & I_{23} &= - \sum_{h=1}^N m_h y_h z_h; \end{aligned}$$

con $P_h - Q = x_h \hat{e}_1 + y_h \hat{e}_2 + z_h \hat{e}_3$, $h = 1 \dots N$. Infatti

$$I_{ij} = \sum_{h=1}^N m_h \hat{e}_i \times (P_h - Q) \cdot \hat{e}_j \times (P_h - Q),$$

con

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \times (P_h - Q) &= y_h \hat{e}_3 - z_h \hat{e}_2, \\ \hat{e}_2 \times (P_h - Q) &= z_h \hat{e}_1 - x_h \hat{e}_3, \\ \hat{e}_3 \times (P_h - Q) &= x_h \hat{e}_2 - y_h \hat{e}_1. \end{aligned}$$

SIMMETRIE E MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA

La matrice di inerzia è simmetrica, dunque è diagonalizzabile in una base ortogonale $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$. Gli autovalori dell'operatore di inerzia I_1, I_2, I_3 si chiamano

momenti principali di inerzia, una base $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ in cui I_Q si scrive in forma diagonale e le direzioni degli \hat{e}'_j si dicono rispettivamente base e direzioni principali di inerzia.

Dimostriamo alcune proprietà dei momenti e degli assi principali di inerzia:

Proposizione 27. *Valgono le seguenti proprietà:*

- (i) *Se esiste un piano π_Q passante per Q di simmetria per riflessione (cioè, detta $\tilde{\mathcal{R}}_\pi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ la riflessione rispetto a π_Q , ad ogni punto P di massa m del corpo corrisponde un altro punto $\tilde{\mathcal{R}}_\pi P$ del corpo con la stessa massa) allora la direzione ortogonale a π è principale.*
- (ii) *Se esiste un asse r di simmetria per rotazione passante per Q (cioè, per ogni punto P di massa m del corpo esiste un intero $k > 1$ tale che, detta $\mathcal{R}_k : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ la rotazione di $2\pi/k$ attorno ad r , i punti dell'orbita $\{\mathcal{R}_k^h P\}_{h=0 \dots k-1}$ di P sotto l'azione del gruppo ciclico generato da \mathcal{R}_k corrispondono ad altri punti del corpo con la stessa massa m) allora la direzione di r è principale.*

Inoltre, se $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ è una base principale per \mathfrak{I}_Q :

- (iii) *I momenti principali di inerzia soddisfano $I_1 \leq I_2 + I_3$ e si ha $I_1 = I_2 + I_3$ solo quando il corpo rigido è piano, e sta nel piano $Q\hat{e}'_2\hat{e}'_3$.*
- (iv) *Sia \vec{v} un autovettore dell'operatore di inerzia \mathfrak{I}_Q con autovalore λ .*
 1. *Se $\vec{v} = v_i\hat{e}'_i + v_j\hat{e}'_j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ e $v_i v_j \neq 0$, allora tutti i vettori del piano generato da \hat{e}'_i, \hat{e}'_j definiscono direzioni principali di inerzia con lo stesso valore λ del momento principale di inerzia.*
 2. *Se $\vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j\hat{e}'_j$, $v_j \neq 0 \forall j$, allora \mathfrak{I}_Q è un multiplo dell'operatore identità (quindi tutte le direzioni sono principali).*

Dimostrazione. (i) Considero un riferimento $Q\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ con asse \hat{e}'_3 ortogonale a π_Q ed osservo che $I_{31} = I_{32} = 0$.

(ii) Considero un riferimento $Q\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ con asse $Q\hat{e}'_3 = r$ ed osservo che $I_{31} = I_{32} = 0$. Infatti possiamo trovare r interi k_1, \dots, k_r , dove ogni k_j è > 1 e $\sum_{j=1}^r k_j = N$, tali che

$$I_{31} + iI_{32} = - \sum_{h=1}^N m_h (x_h + iy_h) z_h = - \sum_{j=1}^r m_j z_j \sum_{l=0}^{k_j-1} \omega_{k_j}^l (x_j + iy_j)$$

dove $\omega_k = e^{2\pi i/k}$. Si conclude utilizzando il fatto che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{h=0}^{k-1} \omega_k^h = \frac{\omega_k^k - 1}{\omega_k - 1} = 0.$$

(iii) Segue direttamente dalle formule per $I_{j,j}, j = 1, 2, 3$.

(iv) Dalle relazioni $\mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}'_j = I_j \hat{\mathbf{e}}'_j, \vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^3 v_j \hat{\mathbf{e}}'_j$ si ha

$$\sum_{j=1}^3 v_j I_j \hat{\mathbf{e}}'_j = \mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{v}} = \lambda \vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^3 v_j \lambda \hat{\mathbf{e}}'_j.$$

Dall'unicità della rappresentazione di un vettore come combinazione lineare degli elementi della base abbiamo $\lambda = I_j$ se $v_j \neq 0$. Da qui segue la tesi, infatti se $\mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}'_i = \lambda \hat{\mathbf{e}}'_i, \mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}'_h = \lambda \hat{\mathbf{e}}'_h$, con $i \neq h$ allora ogni combinazione lineare $\alpha \hat{\mathbf{e}}'_i + \beta \hat{\mathbf{e}}'_h$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) è un autovettore di \mathfrak{I}_Q con autovalore λ . Se inoltre troviamo un autovettore $\vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^3 v_j \hat{\mathbf{e}}'_j$ con $v_1 v_2 v_3 \neq 0$ allora $I_1 = I_2 = I_3$ e la matrice di inerzia è un multiplo dell'identità. \square

Esercizio 5. Consideriamo un corpo rigido costituito da N punti di uguale massa m , posti ai vertici dei poliedri platonici ($N = 12, 24, 60$). Dimostrare che ogni direzione è principale per l'operatore di inerzia \mathfrak{I}_B rispetto al baricentro B ,

Esercizio 6. Se $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ è una base principale per \mathfrak{I}_Q , lo è anche per \mathfrak{I}_P con $P \neq Q$?

5.3 Proprietà dinamiche di un corpo rigido

QUANTITÀ DINAMICHE E OPERATORE DI INERZIA

Fissiamo un riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$. Dato un corpo rigido \mathfrak{C} , usando la formula fondamentale (5.3) abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}_Q &= \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_h - O')] = \\ &= m(B - Q) \times \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\omega}} + m(B - Q) \times [\boldsymbol{\omega} \times (Q - O')]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Osservo che nella (5.8) il polo O' si deve muovere come un punto solidale a \mathfrak{C} .

Scegliendo $O' = Q$ nella (5.8) si ha

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = m(B - Q) \times \vec{\mathbf{v}}_Q + \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

che per $\vec{\mathbf{v}}_Q = \mathbf{0}$ oppure per $Q = B$ si semplifica:

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Utilizzando la (5.3) possiamo anche rappresentare l'energia cinetica come

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_{O'}|^2 + m\vec{\omega} \cdot (B - O') \times \vec{v}_{O'} + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_{O'}\vec{\omega}$$

Se scegliamo $O' = B$ otteniamo la versione per i corpi rigidi del teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_B\vec{\omega}. \quad (5.9)$$

5.4 Corpi rigidi continui

Si distinguono corpi continui a 1, 2 e 3 dimensioni, a cui si attribuiscono rispettivamente una densità lineare, di superficie e di volume, denotate con λ , σ , ρ . Consideriamo l'ultimo caso, che è il più generale. La discussione relativa agli altri casi è simile.

Consideriamo la densità di volume

$$\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad \mathbf{x}' \mapsto \rho(\mathbf{x}')$$

dove \mathbf{x}' sono coordinate in un riferimento solidale Σ' . Assumiamo che ρ sia integrabile sull'insieme $C \subset \mathbb{R}^3$ delle coordinate dei punti del corpo relative a Σ' .

Se il corpo rigido non è soggetto ad altri vincoli, una parametrizzazione locale dei punti del corpo è data dalla mappa

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q}; \mathbf{x}') = \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \quad (5.10)$$

con $\mathbf{q} = (\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\theta})$ ed $R = R(\boldsymbol{\theta})$, dove $\boldsymbol{\theta}$ sono gli angoli di Eulero (vedi Sezione 10).

La mappa (5.10) si può sollevare ai vettori velocità, ottenendo

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \quad (5.11)$$

con $\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{v}_{O'}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$.

Introduciamo le definizioni delle quantità dinamiche sostituendo alla somma finita l'integrale sull'insieme C occupato dal corpo. L'insieme C viene definito in un riferimento solidale al corpo, in modo che C non cambi col tempo.

MASSA TOTALE

$$m = \int_C \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

BARICENTRO

$$m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) = \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' d\mathbf{x}' = R \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' \quad (5.12)$$

Osservazione 13. Se $O' = B$ si ottiene

$$\int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' = \mathbf{0}.$$

QUANTITÀ DI MOTO

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \\ &= m\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' = m\mathbf{v}_{O'} + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) \end{aligned}$$

Osservazione 14. Se $O' = B$ si ottiene

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_B.$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q) \times (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (5.13)$$

Introduciamo la matrice di inerzia I_Q , definita da

$$\begin{aligned} I_Q \mathbf{u} &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times [\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q)] d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q) \times [\mathbf{u} \times (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q)] d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (5.14)$$

per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Se $O' = Q$ la (5.14) assume l'espressione più semplice

$$I_Q \mathbf{u} = \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' \times (\mathbf{u} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

Scegliendo $O' = Q$ nella (5.13) si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' \times (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' d\mathbf{x}' \times \mathbf{v}_Q + I_Q \boldsymbol{\omega} = \\ &= m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{v}_Q + I_Q \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

ENERGIA CINETICA

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_C \rho(\mathbf{x}') |\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')|^2 d\mathbf{x}' = \frac{1}{2} \int_C \rho(\mathbf{x}') |\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'|^2 d\mathbf{x}' = \\ &= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_{O'}|^2 + \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}' d\mathbf{x}' + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_{O'} \boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_{O'}|^2 + m \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_{O'} \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Osservazione 15. Se $O' = B$ si ottiene

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_B\boldsymbol{\omega}.$$

Esercizio 7. Mostrare che vale il teorema di scomposizione di \mathbf{M}_Q .

Si introduce la densità di forza $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')$.

RISULTANTE DELLE FORZE

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE RISPETTO A $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\mathbf{N}_Q = \int_C (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

Se $O' = Q$ si ottiene l'espressione più semplice

$$\mathbf{N}_Q = \int_C R\mathbf{x}' \times \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

Esempio 5. (forza di gravità) Con una scelta opportuna del riferimento abbiamo

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')g\mathbf{e}_3,$$

per cui la risultante è

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = -mg\mathbf{e}_3,$$

ed il momento risultante rispetto ad un polo Q è (scegliendo $O' = Q$ e usando la relazione (5.12))

$$\mathbf{N}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times (-mg\mathbf{e}_3).$$

Esempio 6. (forza centrifuga) Se $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare abbiamo

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'),$$

per cui, usando (5.12), la risultante è

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'})),$$

ed il momento risultante rispetto ad un polo Q è (scegliendo $O' = Q$)

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_Q &= - \int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' = \\ &= - \int_C \rho(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\omega} \cdot R\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

5.5 Esempi di matrici principali di inerzia

ASTA OMOGENEA DI LUNGHEZZA ℓ E MASSA m ;

Sia B il baricentro dell'asta. Considero un sistema di riferimento solidale all'asta, centrato in O e con l'asta lungo l'asse Oe_1 . Allora la matrice di inerzia I_B , relativa al polo B si scrive

$$I_B^{asta} = \frac{m\ell^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

DISCO ED ANELLO OMOGENEI DI RAGGIO R E DI MASSA m ;

$$I_B^{disco} = \frac{mR^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_B^{anello} = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

SFERA PIENA E VUOTA, OMOGENEE, DI RAGGIO R E DI MASSA m ;

$$I_B^{sp} = \frac{2mR^2}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_B^{sv} = \frac{2mR^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

CILINDRO PIENO E VUOTO, OMOGENEI, DI RAGGIO R , DI ALTEZZA h E DI MASSA m ;

$$I_B^{cp} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix};$$

$$I_B^{cv} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix};$$

5.6 Equazioni cardinali e moti rigidi

Richiamiamo le due equazioni cardinali della dinamica per un sistema di N punti materiali (4.9):

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_B &= \mathbf{R}^{(E)} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q &= -m\mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_Q^{(E)} \end{cases} \quad (5.15)$$

Possiamo usare le equazioni (5.15) per determinare il moto di un corpo rigido, anche soggetto ad altri vincoli. Consideriamo un esempio semplice e determiniamo le equazioni del moto in diversi modi.

Esempio 7. *In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxyz$, con asse Oy verticale ascendente. Si studi il moto di un'asta omogenea di lunghezza 2ℓ e massa m che scivola mantenendo gli estremi sui due assi coordinati Ox, Oy .*

Si assume che gli assi coordinati sviluppino delle forze $\Phi_1\mathbf{e}_1, \Phi_2\mathbf{e}_2$, dette reazioni vincolari, sugli estremi dell'asta. Le componenti Φ_1, Φ_2 sono tra le incognite del problema. Per determinare la configurazione dell'asta basta specificare l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale. La velocità angolare dell'asta è $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_3$.

Siamo interessati a scrivere delle equazioni che abbiano una forma semplice e che, se possibile, siano **equazioni pure**, cioè non contengano reazioni vincolari.

Scriviamo la 2^a equazione cardinale per l'asta facendo 3 scelte diverse per il polo Q .

i) $Q = O$, l'origine del riferimento:

$$\dot{\mathbf{M}}_O = -m\mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_O = \mathbf{N}_O; \quad (5.16)$$

ii) $Q = B$, il baricentro dell'asta:

$$\dot{\mathbf{M}}_B = -m\mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_B = \mathbf{N}_B; \quad (5.17)$$

iii) $Q = C_0$, il centro istantaneo di rotazione:

$$\dot{\mathbf{M}}_{C_0} = -m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_{C_0} = \mathbf{N}_{C_0}. \quad (5.18)$$

Osservazione 16. *Al variare di θ il centro istantaneo di rotazione C_0 è un punto sempre diverso in un riferimento solidale al corpo, oltre che nel riferimento Σ . Le coordinate di C_0 in Σ sono*

$$\mathbf{x}_{C_0} = 2\ell(\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2),$$

quindi il termine $-m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B$ è nullo perchè

$$\mathbf{v}_{C_0} = \dot{\theta}\ell(\cos\theta\mathbf{e}_1 - \sin\theta\mathbf{e}_2) \quad (5.19)$$

è parallelo a \mathbf{v}_B . Quando usiamo la formula fondamentale della cinematica (5.3) con il centro istantaneo di rotazione C_0 abbiamo $\mathbf{v}_{C_0} = \mathbf{0}$; questo perchè stiamo considerando la velocità di un punto solidale al corpo, cioè stiamo calcolando il limite del rapporto incrementale in cui appaiono le coordinate dello stesso punto del corpo a due tempi diversi, quindi non possiamo usare la (5.19). Nell'Esempio 7 la confusione tra le due velocità non produce effetti sulla forma dell'equazione, ma non è sempre così. Questa difficoltà nasce dalla notazione utilizzata tradizionalmente, che è la stessa per le due velocità.

La iii) è l'unica equazione pura, cioè in essa non appaiono le reazioni vincolari, infatti

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_O &= \mathbf{x}_A \times \Phi_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{x}_C \times \Phi_2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{x}_B \times m g \mathbf{e}_2 = \\
 &= (-2 \cos \theta \Phi_1 + 2 \sin \theta \Phi_2 - m g \sin \theta) \ell \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{N}_B &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \times \Phi_1 \mathbf{e}_1 + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B) \times \Phi_2 \mathbf{e}_2 = \\
 &= \ell (\sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_2) \times (-\Phi_1 \mathbf{e}_1 + \Phi_2 \mathbf{e}_2) = \\
 &= (\Phi_2 \sin \theta - \Phi_1 \cos \theta) \ell \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{N}_{C_0} &= (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{C_0}) \times (-m g \mathbf{e}_2) = \mathbf{x}_B \times m g \mathbf{e}_2 = \\
 &= m g \ell \sin \theta \mathbf{e}_3.
 \end{aligned}$$

L'equazione iii) appare la scelta più conveniente. Comunque è utile risolvere il problema nei tre modi diversi.

Nel caso i), usando la formula fondamentale (5.3), abbiamo

$$\mathbf{M}_O = m \mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_O + I_O \boldsymbol{\omega}. \quad (5.20)$$

Notare che qui $\mathbf{v}_O \neq \mathbf{0}$ poichè corrisponde alla velocità di O come punto solidale al corpo rigido. Al variare di θ l'origine O ha coordinate diverse in un riferimento solidale, ma nella (5.20) \mathbf{v}_O si deve intendere come la velocità di un punto solidale; per calcolarla possiamo usare nuovamente la formula fondamentale (5.3) nel modo seguente:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_B = 2\mathbf{v}_B = 2\ell\dot{\theta}(\cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{e}_2).$$

Inoltre, con il teorema di Huygens-Steiner, otteniamo

$$I_O \boldsymbol{\omega} = \frac{4}{3} m \ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

Abbiamo dunque

$$\mathbf{M}_O = -2m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 + \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 = -\frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

In alternativa si può calcolare il momento angolare \mathbf{M}_O come segue:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_B + \mathbf{x}_B \times m \mathbf{v}_B = \frac{1}{3} m \ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3 - m \ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

In questo modo sparisce l'ambiguità di notazione, che nasceva dal fatto di calcolare la velocità di un punto solidale al corpo (il punto O), ma sempre diverso al variare di θ .

Dalla (5.16) si ottiene

$$-\frac{2}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} = (-2 \cos \theta \Phi_1 + 2 \sin \theta \Phi_2 - m g \sin \theta) \ell. \quad (5.21)$$

Possiamo eliminare le reazioni vincolari Φ_1, Φ_2 dalla (5.21) utilizzando la prima equazione cardinale proiettata lungo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\Phi_1 = m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_1 = m\ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta), \quad (5.22)$$

$$\Phi_2 - mg = m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_2 = m\ell(\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta). \quad (5.23)$$

Sostituendo (5.22), (5.23) nella (5.21) otteniamo l'equazione del moto:

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4\ell} \sin \theta. \quad (5.24)$$

Nel caso ii) abbiamo

$$\mathbf{M}_B = I_B \boldsymbol{\omega} = \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta} \mathbf{e}_3$$

per cui dalla (5.17) si ottiene l'equazione

$$\frac{m\ell^2}{3} \ddot{\theta} = (\Phi_2 \sin \theta - \Phi_1 \cos \theta) \ell. \quad (5.25)$$

Sostituendo (5.22), (5.23) nella (5.25) si ottiene l'equazione del moto (5.24).

Nel caso iii) abbiamo

$$\mathbf{M}_{C_0} = \mathbf{M}_B + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{C_0}) \times m\mathbf{v}_B = \mathbf{M}_B - \mathbf{x}_{C_0} \times m\mathbf{v}_B = \frac{4}{3} m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

e dalla (5.18) si ottiene subito l'equazione (5.24).

Esercizio 8. *Si studi il moto di un disco omogeneo di raggio R e massa m che rotola senza strisciare su un piano inclinato di un angolo α rispetto a $O\hat{\mathbf{e}}_1$.*

5.7 Conservazione dell'energia ed equazioni del moto

Dal teorema dell'energia cinetica abbiamo

$$\dot{T} = \Pi, \quad (5.26)$$

dove

$$\Pi = \sum_{h=1}^n \vec{\mathbf{F}}_h \cdot \vec{\mathbf{v}}_h = \sum_{h=1}^n \mathbf{F}_h \cdot [\vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_h - O')] = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\mathbf{N}}_{O'}^{(E)} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Nel caso di corpi rigidi continui otteniamo lo stesso risultato usando (5.11) e l'ipotesi che la risultante delle forze interne sia nulla:

$$\Pi = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mathbf{R}^{(E)} \cdot \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(E)} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (5.27)$$

Nell'equazione della variazione dell'energia cinetica (5.26) si possono quindi usare sistemi di forze equivalenti a quelli dati, sia per i corpi rigidi discreti che per quelli continui.

Usiamo la conservazione dell'energia per scrivere le equazioni del moto del sistema dell'Esempio 7.

Le reazioni vincolari sono a potenza nulla, per ogni velocità possibile. La potenza della forza di gravità è la derivata totale rispetto al tempo di $-V$, con $V = mgy$. Derivando rispetto a t l'equazione dell'energia

$$E = T + V = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

si ottiene

$$\dot{E} = \left[\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta \right] \dot{\theta} = 0.$$

Da questa si ottengono due equazioni: la prima, $\dot{\theta} = 0$, dice semplicemente che l'energia si conserva nelle configurazioni di equilibrio. La seconda ci fornisce l'equazione di moto:

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0.$$

Esercizio 9. *Scrivere l'equazione del moto per il disco che rotola su un piano inclinato (esempio 8).*

5.8 Equazioni di Eulero per il corpo rigido con un punto fisso

Fissiamo un riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$, che possiamo assumere inerziale, e scriviamo le equazioni che descrivono il moto di un corpo rigido \mathfrak{C} con un punto fisso O . La seconda equazione cardinale in questo caso è sufficiente per determinare il moto:

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{M}}_O \right|_{\Sigma} = \vec{\mathbf{N}}_O. \quad (5.28)$$

Sia $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ la velocità angolare del corpo rigido e consideriamo un sistema di riferimento principale $\Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$, solidale a \mathfrak{C} e centrato nel punto $O' = O$. Assumiamo

inoltre che la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ sia $\vec{\omega}$, cioè che Σ' abbia la velocità angolare di minima norma tra quella di tutti i riferimenti solidali.²

Dalla (2.5) otteniamo

$$\left. \frac{d\vec{M}_O}{dt} \right|_{\Sigma'} = \vec{M}_O \times \vec{\omega} + \vec{N}_O. \quad (5.29)$$

Usando la relazione

$$\vec{M}_O = \mathfrak{I}_O \vec{\omega}$$

otteniamo le equazioni di Eulero

$$\left. \frac{d}{dt}(\mathfrak{I}_O \vec{\omega}) \right|_{\Sigma'} = \mathfrak{I}_O \vec{\omega} \times \vec{\omega} + \vec{N}_O, \quad (5.30)$$

in cui possiamo scrivere senza ambiguità $\dot{\vec{\omega}}$ per la derivata temporale di $\vec{\omega}$ in Σ' dato che è uguale a quella in Σ .

5.9 Moto per inerzia (Euler-Poinsot)

Definizione 13. *Chiamiamo moti per inerzia le soluzioni di*

$$\left. \frac{d}{dt}(\mathfrak{I}_O \vec{\omega}) \right|_{\Sigma'} = \mathfrak{I}_O \vec{\omega} \times \vec{\omega}, \quad (5.31)$$

cioè le soluzioni delle equazioni di Eulero (5.30) con $\vec{N}_O = \vec{0}$.

Rientrano in questo caso i moti di un corpo rigido pesante (cioè soggetto alla forza di gravità) vincolato al baricentro, ma anche un corpo rigido pesante libero di muoversi nello spazio. Per quest'ultimo basta studiare il moto nel sistema di riferimento del baricentro, che quindi diventa un punto fisso).

Rappresentiamo la velocità angolare $\vec{\omega}$, il momento angolare \vec{M}_O ed il momento della forza \vec{N}_O in coordinate nella base $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$:

$$\vec{\omega} = \sum_{h=1}^3 \omega_h \hat{e}'_h, \quad \vec{M}_O = \sum_{h=1}^3 M_h \hat{e}'_h = \sum_{h=1}^3 I_h \omega_h \hat{e}'_h, \quad \vec{N}_O = \sum_{h=1}^3 N_h \hat{e}'_h.$$

Le equazioni (5.31), scritte in coordinate nella base \mathcal{B}' , diventano

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}_2 = \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_3 = \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) \end{cases} . \quad (5.32)$$

²Questa ultima ipotesi serve a includere nella trattazione i corpi costituiti da punti tutti allineati.

Si può descrivere la soluzione generale di queste equazioni tramite l'uso di funzioni speciali, vedi [18].

È interessante ottenere una descrizione delle soluzioni dal punto di vista geometrico utilizzando solo gli integrali primi della norma del momento angolare e dell'energia cinetica. Quest'ultima si conserva perché la potenza della reazione vincolare è nulla, infatti

$$\dot{T} = \Pi = \mathbf{R}^{(E)} \cdot \mathbf{v}_O + \mathbf{N}^{(E)} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Per questo introduciamo la seguente

Definizione 14. *L'insieme*

$$\mathcal{E}_O = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}^3 : \vec{\mathbf{x}} \cdot \mathfrak{I}_O \vec{\mathbf{x}} = 1\}$$

si dice **ellissoide di inerzia** relativo al punto O .

Nella base \mathcal{B}' l'equazione dell'ellissoide di inerzia si scrive

$$I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1,$$

con $\vec{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^3 x_j \hat{\mathbf{e}}'_j$. Quindi gli assi principali dell'ellissoide sono diretti lungo le direzioni principali di inerzia e la loro lunghezza è $1/\sqrt{I_j}$, $j = 1, 2, 3$.

Proposizione 28. (Poinsot) *In una precessione per inerzia di un corpo rigido con punto fisso O l'ellissoide di inerzia relativo al polo O rotola senza strisciare su un piano fisso perpendicolare al vettore momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$.*

Sia E il valore costante dell'energia cinetica:

$$E = T = \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathfrak{I}_O \vec{\boldsymbol{\omega}},$$

in cui $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ è la velocità angolare del corpo rigido. Il vettore $\vec{\boldsymbol{\xi}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}/\sqrt{2E}$ ci dà l'intersezione di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ con l'ellissoide di inerzia \mathcal{E}_O . Si osserva che

1. il piano tangente all'ellissoide nel punto P individuato da $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ è ortogonale a $\vec{\mathbf{M}}_O$, infatti

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} \cdot I_O \mathbf{x}) = 2I_O \mathbf{x}$$

e, sostituendo $\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}/\sqrt{2E}$ abbiamo $I_O \boldsymbol{\omega} \sqrt{2/E} = \mathbf{M}_O \sqrt{2/E}$; quindi il vettore $2I_O \vec{\boldsymbol{\xi}}$, che ci dà la normale all'ellissoide in P , è parallelo al momento angolare.

2. la distanza di tale piano da O è costante, infatti questa è data da

$$\frac{\vec{\xi} \cdot \vec{M}_O}{|\vec{M}_O|} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{\omega}}{\sqrt{2E}|\vec{M}_O|} = \frac{\sqrt{2E}}{|\vec{M}_O|};$$

3. la velocità del punto dell'ellissoide a contatto col piano è nulla, infatti l'ellissoide è solidale al corpo rigido in questione e $O\vec{\xi}$ è l'asse istantaneo di rotazione. Siccome $\vec{v}_O = \vec{0}$, tutti i punti del corpo su $O\vec{\xi}$ hanno velocità nulla.

Si chiama **poloide** la curva tracciata sulla superficie dell'ellissoide di inerzia, definita dai punti dell'ellissoide a contatto con il piano fisso); si chiama invece **erpoloide** la curva, tracciata sul piano fisso, definita dal punto di contatto tra l'ellissoide di inerzia e il piano.

Esaminiamo in dettaglio il caso perfettamente simmetrico ($I_1 = I_2 = I_3$), il caso a simmetria giroscopica ($I_1 = I_2 \neq I_3$) e quello generale ($I_1 > I_2 > I_3$).

CASO 1: $I_1 = I_2 = I_3 = I$

Questo è il caso di un corpo sferico omogeneo o comunque di un corpo con distribuzione di massa a simmetria sferica, per esempio un corpo formato da 8 masse uguali disposte ai vertici di un cubo, vedi Esercizio 5.

Abbiamo la relazione

$$\vec{M}_O = I \vec{\omega} \quad (5.33)$$

Siccome \vec{M}_O è un integrale primo nel sistema di riferimento inerziale anche $\vec{\omega} = \vec{M}_O/I$ è costante lungo le orbite, quindi *il moto per inerzia è un moto rotatorio uniforme attorno a un asse fisso nello spazio (nel riferimento inerziale)*, che è l'asse istantaneo di rotazione. Infatti, per ogni punto P del corpo si ha $\vec{v} = \vec{\omega} \times (P - O)$ e, scegliendo Σ in modo che $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ (ω costante) si ha il sistema

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x, \quad \dot{z} = 0,$$

che ha per soluzioni rotazioni uniformi attorno all'asse $O\hat{e}_3$, con lo stesso periodo $2\pi/\omega$, per ogni condizione iniziale che non sta su tale asse.

Il vettore \vec{M}_O è costante anche nel sistema di riferimento solidale al corpo: questo segue dalla (5.33) e dalle equazioni di Eulero (5.32), che in questo caso diventano

$$I_1 \dot{\omega}_1 = I_2 \dot{\omega}_2 = I_3 \dot{\omega}_3 = 0.$$

Il fatto che $\vec{\omega}$ sia costante anche nel riferimento solidale segue anche dalla (2.5).

CASO 2: $I_1 = I_2 \neq I_3$

In questo caso $\vec{\omega}$ non è più costante, ma valgono le seguenti proprietà:

1. $|\vec{\omega}|$ è costante;
2. il momento angolare \vec{M}_O , la velocità angolare $\vec{\omega}$ e l'asse \hat{e}'_3 sono complanari;
3. gli angoli tra due qualsiasi dei vettori $\vec{M}_O, \vec{\omega}, \hat{e}'_3$ sono costanti.

Osservazione 17. *La terza proprietà ci dice in particolare che sono costanti le componenti del vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ sui vettori \hat{e}'_3 ed \vec{M}_O .*

Dimostrazione. Le equazioni di Eulero si scrivono nel modo seguente

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_1 - I_3) \\ I_1 \dot{\omega}_2 = \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

dunque otteniamo

$$\omega_3 = \text{costante} \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{costante} ,$$

per cui è costante anche $|\omega|$.

Siano α l'angolo tra \vec{M}_O ed $\vec{\omega}$, β l'angolo tra $\vec{\omega}$ ed \hat{e}'_3 e γ l'angolo tra \vec{M}_O ed \hat{e}'_3 . Scriviamo le espressioni dei coseni di tali angoli:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{\omega}}{|\vec{M}_O| |\vec{\omega}|} = \frac{2E}{|\vec{M}_O| |\vec{\omega}|} \\ \cos \beta &= \frac{\omega_3}{|\vec{\omega}|} \\ \cos \gamma &= \frac{M_3}{|\vec{M}_O|} = \frac{I_3 \omega_3}{|\vec{M}_O|} \end{aligned}$$

Usando il punto (1) e la conservazione dell'energia e della lunghezza del momento angolare (anche nel sistema di riferimento solidale) otteniamo che $\cos \alpha$ è costante. Dal punto (1) segue immediatamente che anche $\cos \beta$ è costante. La dimostrazione che $\cos \gamma$ è costante si fa in modo analogo.

Il fatto che i vettori $\vec{M}_O, \vec{\omega}, \hat{e}'_3$ siano coplanari durante il moto si ottiene dalla relazione

$$\det \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 & I_1 \omega_2 & I_3 \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

□

Proposizione 29. *Si consideri il moto di un corpo rigido \mathcal{C} con un punto fisso O avente struttura giroscopica attorno all'asse \hat{e}'_3 . Il vettore $\vec{\omega}$ ruota uniformemente attorno alla direzione fissa del momento angolare \vec{M}_O descrivendo un cono di rotazione \mathcal{C}' con velocità angolare costante. Analogamente la traccia di $\vec{\omega}$ sul corpo \mathcal{C} descrive un cono di rotazione \mathcal{C}'' con velocità angolare costante. Considerando \mathcal{C}' fisso e \mathcal{C}'' solidale al corpo rigido, si ha che i due coni rotolano l'uno sull'altro senza strisciare (moto alla Poinsot).*

Dimostrazione. Il vettore $\vec{\omega}$ descrive un cono in entrambi i sistemi di riferimento poiché per la proposizione precedente l'angolo tra $\vec{\omega}$ ed \vec{M}_O e l'angolo tra $\vec{\omega}$ ed \hat{e}'_3 sono costanti. Questi due coni rotolano senza strisciare l'uno sull'altro poiché i punti del corpo che si trovano sull'asse passante per O e parallelo ad $\vec{\omega}$ hanno tutti velocità nulla ($O\vec{\omega}$ è l'asse istantaneo di rotazione e $\vec{v}_O = \vec{0}$). Tale asse corrisponde alla retta istantanea di contatto tra i due coni e ha velocità istantanea nulla sia nel sistema di riferimento inerziale che nel riferimento solidale: ciò è dovuto al fatto che la derivata temporale di $\vec{\omega}$ fatta nei due riferimenti è la stessa.

Dimostriamo adesso che il moto di rotazione è uniforme.

$$\vec{\omega} = \omega' \hat{e}_{M_O} + \omega'' \hat{e}'_3$$

con \hat{e}_{M_O} versore di \vec{M}_O , per cui

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}'_3 \right|_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \hat{e}'_3 = \omega' \hat{e}_{M_O} \times \hat{e}'_3.$$

Analogamente si ha

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma'} = -\vec{\omega} \times \hat{e}_{M_O} = -\omega'' \hat{e}'_3 \times \hat{e}_{M_O}.$$

□

CASO 3: $I_1 > I_2 > I_3$

Le equazioni di Eulero (5.31) ammettono gli integrali primi

$$\begin{cases} |\mathbf{M}_O|^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2, \\ 2E = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2, \end{cases}$$

con $\mathbf{M}_O = (M_1, M_2, M_3)^T$.

Definizione 15. *Chiamiamo rotazioni stazionarie le soluzioni $\vec{\omega}$ costanti delle equazioni di Eulero (5.31).*

Ricordiamo che $\vec{\omega}$ è costante nel riferimento Σ' se e solo se è costante in Σ .
Dalla (5.31) si vede che le rotazioni stazionarie sono quelle per cui

$$\mathfrak{I}_O \vec{\omega} \parallel \vec{\omega},$$

cioè sono gli autovettori di \mathfrak{I}_O . Quindi se il vettore $\vec{\omega}$ è una rotazione stazionaria allora è necessariamente parallelo ad uno degli \hat{e}'_j . Si parla dunque di rotazioni stazionarie attorno agli assi $O\hat{e}'_1, O\hat{e}'_2, O\hat{e}'_3$.

Dalla relazione $\vec{M}_O = \mathfrak{I}_O \vec{\omega}$ si ottiene che anche \vec{M}_O deve essere parallelo ad $\vec{\omega}$. Quindi in questo caso \vec{M}_O è costante anche in Σ' .

Per studiare la stabilità delle rotazioni stazionarie e capire la geometria delle soluzioni di (5.31) consideriamo le equazioni

$$\frac{d}{dt} \vec{M}_O \Big|_{\Sigma'} = \vec{M}_O \times \vec{\omega}, \quad (5.35)$$

che hanno gli integrali primi

$$\begin{cases} |\mathbf{M}_O|^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2, \\ 2E = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}. \end{cases} \quad (5.36)$$

Per valori fissati di $|\mathbf{M}_O|$, E le (5.36) rappresentano l'intersezione di una sfera di raggio $|\mathbf{M}_O|$ con un ellissoide di semiassi $\sqrt{2EI_j}$, $j = 1, 2, 3$, e individuiamo le traiettorie possibili per le coordinate (M_1, M_2, M_3) del momento angolare nella base \mathcal{B}' .

Fissiamo un valore E per l'energia e consideriamo l'insieme delle coordinate (M_1, M_2, M_3) che soddisfano (5.36). Il fatto che questo insieme sia non vuoto è garantito dalle relazioni

$$2EI_3 \leq |\mathbf{M}_O|^2 \leq 2EI_1.$$

Descriviamo l'insieme delle traiettorie delle soluzioni di (5.32) nei vari casi. Ci sono cinque possibilità: 1) $2EI_3 = |\mathbf{M}_O|^2$; 2) $2EI_3 < |\mathbf{M}_O|^2 < 2EI_2$; 3) $|\mathbf{M}_O|^2 = 2EI_2$; 4) $2EI_2 < |\mathbf{M}_O|^2 < 2EI_1$; 5) $|\mathbf{M}_O|^2 = 2EI_1$.

Nel caso 1) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse $O\hat{e}'_3$, che corrispondono alle rotazioni stazionarie con $\vec{\omega}$ parallelo a \hat{e}'_3 . Nel caso 2) abbiamo due curve chiuse attorno all'asse $O\hat{e}'_3$. Nel caso 3) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse $O\hat{e}'_2$ e quattro curve che li congiungono, che corrispondono alle separatrici stabili e instabili delle equazioni (5.35) ristrette all'ellissoide di energia costante. Nel caso 4) abbiamo due curve chiuse attorno all'asse $O\hat{e}'_1$. Nel caso 5) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse $O\hat{e}'_1$.

... inserisci figura ...

Usando la relazione $\vec{\mathbf{M}}_O = \mathfrak{I}_O \vec{\omega}$ si conclude che le rotazioni stazionarie attorno a $O\hat{\mathbf{e}}'_1$, $O\hat{\mathbf{e}}'_3$ sono stabili, mentre quelle attorno a $O\hat{\mathbf{e}}'_2$ sono instabili.

L'instabilità delle rotazioni stazionarie attorno all'asse $O\hat{\mathbf{e}}'_2$ si può anche ottenere dal calcolo diretto degli esponenti di Lyapounov del sistema

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \alpha_1 \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \alpha_2 \omega_3 \omega_1 \\ \dot{\omega}_3 = \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

con

$$\alpha_1 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} > 0, \quad \alpha_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} < 0, \quad \alpha_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} > 0.$$

Posto $\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}) = (\alpha_1 \omega_2 \omega_3, \alpha_2 \omega_3 \omega_1, \alpha_3 \omega_1 \omega_2)^T$ si ottiene infatti che

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

per cui gli esponenti di Lyapounov sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\alpha_1 \alpha_3}$$

ed uno di essi è > 0 .

5.9.1 Fase geometrica nel moto del corpo rigido

Consideriamo adesso un moto periodico attorno ad una rotazione stazionaria stabile, per esempio attorno a $O\hat{\mathbf{e}}_1$. Vogliamo calcolare l'angolo $\Delta\theta$, che ci dice di quanto è ruotato il corpo rigido dopo un periodo di \mathbf{M}_O .

Riportiamo qui una formula dimostrata da Montgomery in [15]:

$$\Delta\theta = 2 \frac{ET}{|\mathbf{M}_O|} - \Omega \tag{5.37}$$

in cui T è il periodo del moto ed Ω è l'angolo solido tracciato sulla sfera unitaria centrata in O e solidale al corpo dalla direzione del momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$.

In [14] si trova una dimostrazione della formula (5.37) utilizzando il teorema di Gauss-Bonnet e la Proposizione 28.

Parte II
Meccanica lagrangiana

Capitolo 6

Sistemi vincolati

Definizione 16. *Un sistema di N punti materiali è vincolato se l'insieme delle fasi (posizioni e velocità) ammissibili al tempo t è ristretto ad un sottoinsieme \mathcal{F}_t di $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$.*

Se $\mathcal{F}_t \subset \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ non varia con t i vincoli si dicono *fissi* o *scleronomi*. Altrimenti si hanno vincoli *mobili* o *reonomi*.

Nei modelli dei problemi meccanici che consideriamo, gli insiemi \mathcal{F}_t hanno una struttura di varietà differenziabile e, in caso di vincoli mobili, la famiglia $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è costituita da varietà diffeomorfe tra loro.

Inoltre la restrizione ad un sottoinsieme dello spazio delle fasi si ottiene imponendo delle relazioni della forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (6.1)$$

con

$$\begin{cases} \mathbf{a} \in C^2(\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^k), \\ B \in C^2(\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}; \mathcal{M}(k, 3N)), \end{cases} \quad 1 \leq k \leq 3N,$$

che legano le posizioni \mathbf{x} degli N punti e le loro velocità \mathbf{v} al tempo t .

Osserviamo che l'equazione (6.1) può essere conseguenza di una relazione che lega le sole posizioni e il tempo:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad (6.2)$$

con $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^k)$, $1 \leq k \leq 3N$. Questo accade se si ha

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad B(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (6.3)$$

e si dice che l'equazione del vincolo è integrabile.

D'altra parte, se si impone la relazione (6.2), che lega tra loro soltanto le posizioni e il tempo, questa implica sempre una relazione della forma (6.1) dove Ψ , B sono dati da (6.3).

Richiamiamo adesso alcune definizioni di carattere geometrico, utili per lo sviluppo della teoria dei moti vincolati.

6.1 Varietà differenziabili e spazi tangenti in \mathbb{R}^m

Sottovarietà di \mathbb{R}^m

Sia $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ una mappa differenziabile, con $k \leq m$. Diciamo che

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

è una sottovarietà di \mathbb{R}^m di dimensione $n = m - k$ se

$$\text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}.$$

Nell'intorno di ogni punto di \mathcal{C} possiamo introdurre coordinate locali $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_n)$ tramite le carte locali

$$\mathbb{R}^n \supseteq U \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m, \quad \text{rank} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) = n, \quad (6.4)$$

definite su aperti U di \mathbb{R}^n .

Vettori tangenti a \mathcal{C}

Dato un sistema di coordinate locali $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$ su \mathcal{C} possiamo introdurre in modo naturale delle coordinate locali $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)$ sugli spazi tangenti $T_{\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})}\mathcal{C}$. Infatti i vettori

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_1}(\mathbf{q}), \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_n}(\mathbf{q})$$

formano una base di $T_{\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})}\mathcal{C}$, per cui un generico vettore \mathbf{v} , tangente a \mathcal{C} in $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$, si scrive in modo unico come combinazione lineare

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}) \quad (6.5)$$

con coefficienti \dot{q}_h , $h = 1 \dots n$.

Esiste una corrispondenza biunivoca tra $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ e $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ data dalla mappa

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \left(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}), \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m. \quad (6.6)$$

Fibrato tangente a \mathcal{C}

Definiamo il **fibrato tangente** alla varietà \mathcal{C} come

$$T\mathcal{C} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}\}.$$

Proposizione 30. $T\mathcal{C}$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ di dimensione $2n$.

Dimostrazione. Se $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ allora i vettori \mathbf{v} tangenti a \mathcal{C} in \mathbf{x} sono tutti quelli che soddisfano la relazione

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (6.7)$$

Infatti se \mathbf{v} soddisfa (6.7), allora è ortogonale a tutti i vettori $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \mathbf{x}}$, $j = 1 \dots k$, che formano una base dello spazio ortogonale a $T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}$. Consideriamo la mappa

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \ni (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto \left(\Psi(\mathbf{x}), \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{v} \right),$$

con matrice jacobiana

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{v})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} \right] & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}.$$

Osservo che

$$\text{rank} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{v})}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 2k$$

per ogni $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in T\mathcal{C}$. □

Le coordinate $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ definite da (6.6) sono una scelta naturale per descrivere localmente il fibrato tangente $T\mathcal{C}$.

6.2 Vincoli olonomi

Consideriamo un sistema di N punti materiali vincolato. Assumiamo che

$$\mathcal{C}_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} : \Psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}\}$$

sia l'insieme delle configurazioni ammissibili al tempo t , dove

$$\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \Psi(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^k, \quad k \leq 3N$$

è una mappa di classe C^2 tale che

$$\text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}_t, \forall t. \quad (6.8)$$

Quindi per ogni tempo t , l'insieme delle configurazioni \mathcal{C}_t è una sottovarietà di \mathbb{R}^{3N} di dimensione $n = 3N - k$. Si assume che le varietà \mathcal{C}_t , $t \in \mathbb{R}$ siano tutte diffeomorfe tra loro, quindi hanno tutte la stessa dimensione n .

Per ogni t abbiamo un sistema di coordinate locali di classe C^2

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^{3N}.$$

Definizione 17. Diciamo che il vincolo è olonomo¹ se ad ogni istante t l'insieme delle configurazioni del sistema è diffeomorfo ad una varietà differenziabile \mathcal{C}_t e l'insieme delle fasi (cioè le posizioni e velocità) è diffeomorfo al fibrato tangente $T\mathcal{C}_t$ di \mathcal{C}_t .

Possiamo avere dei vincoli olonomi anche quando l'equazione del vincolo sia della forma (6.1) ed il vincolo integrabile, a patto che l'equazione che si ottiene per le sole posizioni e tempo $\Psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ soddisfi la condizione (6.8).

Come esempio di vincolo integrabile consideriamo il seguente:

Esempio 8. Disco verticale di raggio R che rotola senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale.

Assumiamo inizialmente che il disco possa anche strisciare, mantenendosi sempre a contatto con la guida rettilinea. Per definire la configurazione del disco nel caso in cui esso possa anche strisciare mantenendosi sempre a contatto con la guida possiamo usare l'ascissa s del suo baricentro lungo la guida e l'angolo θ che un raggio del disco forma con una direzione fissa, per esempio quella verticale. Imponiamo adesso la condizione di rotolamento senza strisciamento. Dalla formula fondamentale della cinematica rigida applicata al baricentro B del disco e al punto del disco P a contatto con la guida, tenendo conto che la velocità angolare del disco è $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_3$ possiamo scrivere

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0.$$

Integrando questa equazione si ottiene

$$(s - s_0) + R(\theta - \theta_0) = 0$$

¹Questo termine è stato introdotto da Herz e deriva dal greco ὅλος (= tutto, intero) e νόμος (= legge) e si riferisce alla possibilità di scrivere una legge integrale (che coinvolga solo posizioni e tempo) per l'equazione dei vincoli.

in cui s_0, θ_0 sono i valori di s, θ ad un tempo t_0 . Si possono scegliere i valori di s_0, θ_0 in modo che valga $s_0 + R\theta_0 = 0$, quindi si ottiene un'equazione del vincolo della forma

$$\Psi(\mathbf{q}) = 0,$$

con $\mathbf{q} = (s, \theta)$.

6.3 Vincoli anolonomi

Se l'equazione del vincolo è della forma (6.1), ma non esiste una funzione Ψ che soddisfi le equazioni (6.3), allora il vincolo si dice anolonomo. I sistemi anolonomi che consideriamo hanno tutti una varietà delle configurazioni, però non tutti i vettori tangenti a questa varietà sono accessibili. Esempi classici di vincoli anolonomi sono i seguenti:

1. un disco verticale che rotola senza strisciare su un piano orizzontale;
2. il pattino (o slitta) di Chaplygin su un piano;
3. una sfera che rotola senza strisciare su un piano;
4. una sfera che rotola senza strisciare all'interno di un cilindro verticale.

6.4 Lo studio del moto vincolato

Le restrizioni sulle posizioni e velocità che si hanno nel moto vincolato sono causate dai vincoli stessi. Affinchè le relazioni (6.1) siano mantenute, si ammette che i vincoli esercitino delle forze sui punti del sistema, che si chiamano **reazioni vincolari**. Queste forze però sono di natura diversa dalle forze \mathbf{F}_j che agiscono sui punti di un sistema meccanico non vincolato, in quanto sono esse stesse da determinarsi, e non sono funzioni note dello stato cinetico del sistema.

Già nel semplice caso di un punto materiale vincolato ad una curva in \mathbb{R}^3 si incontrano delle difficoltà quando si cerca di determinare il moto. In particolare si trova che è necessario fare delle ipotesi sulle reazioni vincolari. Consideriamo una curva regolare $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizzata per lunghezza d'arco s . Allora, indicando con $'$ la derivata rispetto ad s ,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \gamma(s(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{s}(t)\gamma'(s(t)), \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{s}^2(t)\gamma''(s(t)) + \ddot{s}(t)\gamma'(s(t)).\end{aligned}$$

Consideriamo la base mobile di Frénet $\{\mathbf{e}_t(s), \mathbf{e}_n(s), \mathbf{e}_b(s)\}$ (rispettivamente il vettore tangente, normale e binormale), definita da

$$\mathbf{e}_t(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s), \quad \mathbf{e}_n(s) = \frac{\boldsymbol{\gamma}''(s)}{|\boldsymbol{\gamma}''(s)|}, \quad \mathbf{e}_b(s) = \mathbf{e}_t(s) \times \mathbf{e}_n(s).$$

Poiché s è il parametro arco si ha

$$\mathbf{e}_t(s) \cdot \mathbf{e}_t(s) = 1, \quad \forall s; \quad (6.9)$$

inoltre, derivando la (6.9) rispetto ad s , si ottiene che

$$\mathbf{e}_t(s) \cdot \mathbf{e}_b(s) = 0.$$

La funzione $\kappa(s) = |\boldsymbol{\gamma}''(s)|$ si chiama *curvatura* di $\boldsymbol{\gamma}$. Con questa notazione si ha

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{s}^2 \kappa(s) \mathbf{e}_n(s) + \ddot{s} \mathbf{e}_t(s).$$

Supponiamo che il punto sia soggetto ad una forza $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ e alla reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}$. L'equazione di Newton si scrive

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \boldsymbol{\Phi}(t).$$

Se proiettiamo l'equazione di Newton lungo la base di Frénet si ottiene

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_t(s, \dot{s}, t) + \Phi_t, \\ m\dot{s}^2 \kappa(s) &= F_n(s, \dot{s}, t) + \Phi_n, \\ 0 &= F_b(s, \dot{s}, t) + \Phi_b, \end{aligned} \quad (6.10)$$

dove $F_t, F_n, F_b, \Phi_t, \Phi_n, \Phi_b$ sono le componenti della forza \mathbf{F} e della reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}$ lungo i vettori della base di Frénet.

Si vede allora che per determinare il moto $t \mapsto s(t)$ e la reazione vincolare $\boldsymbol{\Phi}$ è necessario fare delle ipotesi. Un'ipotesi comune è di assumere che la reazione vincolare sia ortogonale alla curva: $\Phi_t = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{e}_t = 0$ (vincolo liscio). In questo caso la prima equazione in (6.10) diventa un'equazione pura (non contiene reazioni vincolari):

$$m\ddot{s} = F_t(s, \dot{s}, t).$$

Da questa si può determinare il moto $t \mapsto s(t)$. Sostituendo nelle altre equazioni in (6.10) si ottengono le componenti della reazione vincolare ortogonali al vincolo in funzione del tempo t :

$$\Phi_n = -F_n(s, \dot{s}, t) + m\dot{s}^2 \kappa(s), \quad \Phi_b = -F_b(s, \dot{s}, t).$$

La soluzione del problema si basa sulle ipotesi fatte per la reazione vincolare.

Esempio 9. Si fissi un riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$, con l'asse $O\hat{\mathbf{e}}_1$ verticale discendente. Consideriamo un pendolo, costituito da un punto materiale di massa m fissato ad un estremo di una sbarretta di lunghezza 2ℓ e massa trascurabile. Il sistema è soggetto alla forza di gravità, di accelerazione g . Dall'equazione di Newton si ha

$$m\mathbf{a} = mg\mathbf{e}_1 + \Phi\mathbf{e}_\rho, \quad (6.11)$$

in cui $\mathbf{e}_\rho = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$. Abbiamo assunto che la reazione vincolare sia ortogonale al vincolo (vincolo ideale). Proiettiamo l'equazione (6.11) lungo la direzione radiale \mathbf{e}_ρ e lungo quella tangenziale $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \frac{g}{\ell}\sin\theta &= 0, \\ \dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}\cos\theta + \frac{\Phi}{m\ell} &= 0. \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si può scrivere la reazione vincolare in funzione dello stato del sistema. Osserviamo che abbiamo potuto fare ciò grazie alle ipotesi fatte sulle reazioni vincolari.

Esercizio 10. Determinare il moto e la reazione vincolare per una particella di massa m vincolata a muoversi su una circonferenza di raggio R scabra, assumendo che valga la legge

$$\Phi_t = -\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|}\sqrt{\Phi_n^2 + \Phi_b^2}.$$

(Osserviamo che in questo caso il vincolo non è ideale.)

6.5 Vincoli ideali e principio di D'Alembert

Considero N punti materiali soggetti a vincoli olonomi, con varietà delle configurazioni \mathcal{C}_t .

Definizione 18. Diciamo che il vincolo è ideale se le reazioni vincolari $\Phi = (\Phi_1 \dots \Phi_N)$ che può esercitare sugli N punti in una qualunque configurazione $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_t$ soddisfano

$$\Phi \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}_t, \quad \forall t.$$

Date delle coordinate locali $\mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q}, t)$ sulla varietà \mathcal{C}_t i vettori velocità si scrivono

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) + \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{q}, t). \quad (6.12)$$

Osservazione 18. *Al variare dei coefficienti \dot{q}_h l'espressione*

$$\sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t)$$

*descrive tutti i vettori tangenti alla varietà delle configurazioni \mathcal{C}_t : questi si chiamano anche **velocità virtuali** e, nel caso di vincoli mobili, sono genericamente distinte dalle velocità reali, date dalla (6.12).*

Principio di d'Alembert

Sia $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$ la soluzione dell'equazioni di Newton

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \boldsymbol{\Phi}_j, \quad j = 1 \dots N$$

con condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$. Siccome il vincolo è ideale possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^N [m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) - \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)] \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_N) \in T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{C}_t, \quad \forall t \quad (6.13)$$

Definizione 19. *Se vale la relazione (6.13) diciamo che il sistema meccanico soddisfa il **principio di d'Alembert**.*

I vettori

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_1}(\mathbf{q}(t), t), \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_n}(\mathbf{q}(t), t),$$

con $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}(t), t) = \mathbf{x}(t)$, formano una base di $T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{C}_t$, quindi le equazioni del principio di d'Alembert si può scrivere così:

$$\sum_{j=1}^N [m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) - \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)] \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) = 0, \quad \forall h = 1 \dots n, \quad \forall t. \quad (6.14)$$

Osservazione 19. *Le equazioni (6.14) sono equazioni pure, cioè non vi appaiono le reazioni vincolari.*

Principio dei lavori virtuali

Dalla (6.14) possiamo ottenere una caratterizzazione delle posizioni di equilibrio per i sistemi meccanici.

Dato un sistema di N punti materiali soggetti a vincoli fissi, con varietà delle configurazioni \mathcal{C} , e forze attive \mathbf{F}_j ($j = 1 \dots N$) indipendenti dal tempo, il punto $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$ è una posizione di equilibrio se

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}) \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_N) \in T_{\mathbf{x}_0} \mathcal{C}. \quad (6.15)$$

Definizione 20. *Se vale la relazione (6.15) diciamo che il punto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$ soddisfa il principio dei lavori virtuali.*

In modo analogo a prima il principio dei lavori virtuali si può scrivere così:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0), \mathbf{0}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}_0) = 0, \quad \forall h = 1 \dots n, \quad \forall t, \quad (6.16)$$

con $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$.

Dal punto di vista storica, nella formulazione del principio (6.13), D'Alembert si era basato sul principio dei lavori virtuali, interpretando il termine $-\sum_{j=1}^N m_j \ddot{\mathbf{x}}(t)$ come l'aggiunta di altre forze (dette *forze di inerzia*) al sistema meccanico. In questo modo D'Alembert ricondusse i problemi di dinamica a quelli di statica.

Esempio 10. *(Idealità del vincolo di rigidità)*

Se denotiamo con $\boldsymbol{\Phi}_h$ e \mathbf{v}_h le possibili reazioni vincolari e le possibili velocità dei punti P_h , si ha

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n \boldsymbol{\Phi}_h \cdot \mathbf{v}_h &= \sum_{h=1}^n \boldsymbol{\Phi}_h \cdot [\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_{O'})] = \\ &= \left(\sum_{h=1}^n \boldsymbol{\Phi}_h \right) \cdot \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{h=1}^n (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_{O'}) \times \boldsymbol{\Phi}_h \right) = 0. \end{aligned}$$

Infatti le $\boldsymbol{\Phi}_h$ sono forze interne di tipo classico, per cui

$$\boldsymbol{\Phi}_h = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \boldsymbol{\Phi}_{hk}$$

con

$$\boldsymbol{\Phi}_{hk} + \boldsymbol{\Phi}_{kh} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Phi}_{hk} \times \mathbf{r}_{hk} = \mathbf{0}.$$

Capitolo 7

Equazioni di Lagrange

Consideriamo un sistema di N punti materiali soggetti a vincoli olonomi, con varietà delle configurazioni \mathcal{C}_t al tempo t . Sia $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ un sistema di coordinate locali per \mathcal{C}_t .

Proposizione 31. *L'energia cinetica T è una funzione quadratica delle velocità lagrangiane $\dot{\mathbf{q}}$. In particolare*

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + T_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + T_0(\mathbf{q}, t),$$

dove T_j è omogenea di grado j nelle $\dot{\mathbf{q}}$. Inoltre $T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}}$, in cui $A(\mathbf{q}, t)$ si chiama matrice cinetica ed è definita positiva.

Dimostrazione. Introduciamo la matrice delle masse

$$M = \begin{bmatrix} m_1 I_3 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_N I_3 \end{bmatrix} \quad M = \text{diag}\{m_1, m_1, m_1, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N\}$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \frac{1}{2} \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot M \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \right) \cdot M \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \right) \\ &= T_2 + T_1 + T_0 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}}, \quad A = (a_{hk}), \quad a_{hk} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k} \\ T_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &= \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n), \quad b_i = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_i} \cdot M \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \\ T_0(\mathbf{q}, t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \cdot M \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \end{aligned}$$

Mostriamo che $A(\mathbf{q}, t)$ è definita positiva. Sia $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Allora

$$\mathbf{u} \cdot A(\mathbf{q}, t)\mathbf{u} = \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \chi}{\partial q_k} u_h u_k = \left(\sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h} u_h \right) \cdot M \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_k} u_k \right) > 0,$$

infatti M è definita positiva e, se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h} u_h \neq \mathbf{0}$, poichè $\frac{\partial \chi}{\partial q_1} \dots \frac{\partial \chi}{\partial q_n}$ sono linearmente indipendenti. □

Introduciamo adesso una prima forma delle equazioni di Lagrange.

Definizione 21. *Le funzioni*

$$Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\chi(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) \cdot \frac{\partial \chi_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t), \quad h = 1 \dots n \quad (7.1)$$

si chiamano **forze generalizzate** oppure *componenti lagrangiane delle forze*.

Osserviamo che la dipendenza da t nelle Q_h può essere introdotta sia dalle forze che dal vincolo.

Proposizione 32. *Se $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ soddisfa (6.13) allora $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ data da $\mathbf{x}(t) = \chi(\mathbf{q}(t), t)$ soddisfa le equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (7.2)$$

con $\mathbf{Q} = (Q_1 \dots Q_n)$.

Dimostrazione. Il principio di D'Alembert si può anche scrivere in modo conciso

$$M\ddot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h} = Q_h, \quad h = 1 \dots n. \quad (7.3)$$

Quindi dobbiamo verificare che lungo le soluzioni delle equazioni di Newton si abbia

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = M\ddot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial q_h}, \quad h = 1 \dots n. \quad (7.4)$$

Osserviamo che ad ogni soluzione $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ di (6.13) corrisponde localmente un'unica mappa $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ tramite la relazione

$$\mathbf{x}(t) = \chi(\mathbf{q}(t), t).$$

Consideriamo l'energia cinetica $T = \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot M\mathbf{v}$, con

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Per $h = 1 \dots n$ si ha

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \cdot M\mathbf{v} = \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M\mathbf{v}$$

poichè $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{q}}$, quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M\mathbf{v} + \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

in cui

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{h=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Inoltre

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} \cdot M\mathbf{v}.$$

Dalle relazioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial q_h}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_h \partial t}, \end{aligned}$$

scambiando l'ordine di derivazione si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \chi}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_h}.$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \chi}{\partial q_h} \cdot M \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Si conclude osservando che lungo una soluzione $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, a cui corrisponde $t \mapsto \mathbf{q}(t)$, si ha

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \ddot{\mathbf{x}}(t).$$

□

Osservazione 20. La Proposizione 32 dice che il principio di D'Alembert è equivalente alle equazioni di Lagrange (7.2).

Trasformiamo le equazioni di Lagrange (7.2) in un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Dalla relazione

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + c(\mathbf{q}, t)$$

si ottiene

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = A(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t),$$

dunque le equazioni di Lagrange si possono scrivere

$$A(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

con

$$F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{dA}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{b}}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_h} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_h} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q_h} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial c}{\partial q_h} \\ \frac{dA}{dt} &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial A}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Quindi si può scrivere il sistema del primo ordine in forma normale

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}, t) F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \end{cases} \quad (7.5)$$

7.1 Forze conservative e lagrangiana

Definizione 22. *Un sistema lagrangiano di N punti materiali soggetto a vincoli olonomi con varietà delle configurazioni \mathcal{C}_t , $\dim(\mathcal{C}_t) = n$, e soggetto alle forze attive $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}, t)$, $j = 1 \dots N$, si dice **conservativo** se esiste una funzione $V(\mathbf{q}, t)$ tale che le forze generalizzate $Q_h = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial q_h}$ si rappresentino nel modo seguente:*

$$Q_h(\mathbf{q}, t) = -\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t), \quad h = 1 \dots n.$$

La funzione V si chiama energia potenziale delle forze.

Se le forze \mathbf{F}_j sono conservative, con energia potenziale $\mathcal{V}(\mathbf{x})$, allora possiamo scegliere

$$V(\mathbf{q}, t) = \mathcal{V}(\chi(\mathbf{q}, t))$$

infatti

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) &= -\sum_{j=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)) \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) = \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)) \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) = Q_h(\mathbf{q}, t). \end{aligned}$$

Nel caso di un sistema lagrangiano conservativo possiamo scrivere le equazioni (7.2) nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}, \quad (7.6)$$

dove

Definizione 23. *La funzione*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - V(\mathbf{q}, t)$$

si dice lagrangiana, o funzione di Lagrange.

Chiamiamo **sistemi lagrangiani** i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine della forma (7.6) per i quali

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \text{ è definita positiva per ogni } \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t.$$

7.2 Lagrangiane equivalenti

Vale il seguente risultato

Lemma 1. *Sia $F(\mathbf{q}, t)$ una funzione di classe C^2 e sia*

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Allora si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left(\frac{dF}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial q_h} \left(\frac{dF}{dt} \right) = 0, \quad h = 1 \dots n.$$

Dimostrazione. Osservo che

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left(\frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial q_h},$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} \left(\frac{dF}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_h}.$$

Inoltre

$$\frac{\partial}{\partial q_h} \left(\frac{dF}{dt} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial t}.$$

Si conclude usando la regolarità di F .

□

Siano $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, $F(\mathbf{q}, t)$ funzioni di classe C^2 . Se definiamo

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = cL(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt}F(\mathbf{q}, t), \quad (7.7)$$

con $c \neq 0$ costante, e

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{q}, t) = \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial F}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{q}, t),$$

allora, dal Lemma 1 segue che L e \mathcal{L} definiscono le stesse equazioni di Lagrange.

Esempio 11. *In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz con asse Oz verticale ascendente e si consideri un triangolo rettangolo ABC , con angolo retto in A e angolo α in B , il cui lato AB scivola sull'asse Ox con legge oraria $A(t) \equiv (s(t), 0)$, dove $s \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ è una funzione nota del tempo. Sul triangolo può rotolare senza strisciare un disco omogeneo \mathcal{C} di massa m e raggio R . Sul disco agisce la forza di gravità, di accelerazione g . Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa q del punto di contatto P tra disco e triangolo sul lato BC del triangolo*

- i) scrivere la lagrangiana L del disco relativa al sistema di riferimento Oxz e la lagrangiana L' relativa a un sistema solidale al triangolo;*
- ii) trovare una funzione $F(q, t)$ tale che*

$$L = L' + \frac{d}{dt}F.$$

Nel riferimento Oxz le coordinate del baricentro G del disco sono

$$x_G(q, t) = s(t) + q \cos \alpha + R \sin \alpha, \quad z_G(q, t) = h - q \sin \alpha + R \cos \alpha.$$

Nel riferimento $Ax'z'$, con assi Ax' , Az' paralleli ad Ax , Az rispettivamente, le coordinate del baricentro G del disco sono

$$x'_G(q, t) = q \cos \alpha + R \sin \alpha, \quad z'_G(q, t) = h - q \sin \alpha + R \cos \alpha$$

Le lagrangiane del problema nei due riferimenti si scrivono rispettivamente:

$$L = T - V, \quad L' = T' - V'$$

con

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_G\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}\dot{q}^2 + \dot{s}^2 + 2\cos\alpha\dot{s}\dot{q}\right),$$

$$V = mg(h - q\sin\alpha)$$

e

$$T' = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_G\boldsymbol{\omega} = \frac{3}{4}m\dot{q}^2,$$

$$V' = mg(h - q\sin\alpha) + m\ddot{s}(q\cos\alpha + R\sin\alpha).$$

Il secondo termine nell'ultima formula corrisponde all'energia potenziale delle forze apparenti di trascinamento, che possiamo considerare un'unica forza $-m\ddot{s}\mathbf{e}_1$ applicata al baricentro G . Dimostriamo quest'ultima affermazione. Sia $\mathbf{F}_{\mathbf{x}'}$ la densità di forza di trascinamento, $\rho = m/(\pi R^2)$ la densità di massa del disco \mathcal{C} e $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}^3$ le coordinate del punto \mathbf{x}' del corpo in funzione delle coordinate lagrangiane \mathbf{q} . La forza generalizzata corrispondente si scrive

$$Q_h = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_{\mathbf{x}'} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' = -\rho\ddot{s}\mathbf{e}_1 \cdot \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, \mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' = -m\ddot{s} \frac{\partial(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A)}{\partial q_h}.$$

Questa forza generalizzata deriva dall'energia potenziale $m\ddot{s}\mathbf{x}'_G$, dove $\mathbf{x}'_G = \mathbf{x}_G - \mathbf{x}_A = q\cos\alpha + R\sin\alpha$.

Esempio 12. Posso anche avere una coppia di lagrangiane equivalenti L, \mathcal{L} , che non soddisfano la relazione (7.7):

$$L(q, \dot{q}) = (1 + q^2)^\alpha \dot{q}^\beta, \quad L'(q, \dot{q}) = (1 + q^2)^\gamma \dot{q}^\delta,$$

Posso scegliere $\alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 6, \delta = 3$.

7.3 Invarianza delle equazioni di Lagrange

EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (7.8)$$

Verifichiamo che la forma delle equazioni (7.8) resta la stessa se operiamo un cambiamento di coordinate, sollevato poi ai vettori velocità. Le equazioni (7.8) risultano così la rappresentazione in coordinate locali di un'equazione differenziale definita sul fibrato tangente alla varietà delle configurazioni.

Proposizione 33. Consideriamo un sistema lagrangiano definito da una funzione $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Sia $\mathbf{q} \mapsto \phi(\mathbf{q})$ una cambiamento di variabili di classe C^2 . Allora $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange per L se e solo se $t \mapsto \mathbf{Q}(t) = \phi(\mathbf{q}(t))$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange per

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L\left(\phi^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right).$$

Dimostrazione. Si introduce la trasformazione

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \mapsto \Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \left(\phi(\mathbf{q}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, t\right).$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial}{\partial Q_h} \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_\ell} \dot{Q}_\ell \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_h}$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 \phi_k^{-1}}{\partial Q_\ell \partial Q_h} \dot{Q}_\ell \right).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial}{\partial Q_h} \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_\ell} \dot{Q}_\ell \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial \phi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 \phi_k^{-1}}{\partial Q_h \partial Q_\ell} \dot{Q}_\ell \right). \end{aligned}$$

Usando il fatto che ϕ^{-1} è di classe C^2 si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{Q}} = \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) \left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \right]^{-1} \right) \circ \Phi^{-1}.$$

□

Osservazione 21. La Proposizione 33 non vale se ϕ dipende anche da t .

7.4 Energia potenziale generalizzata

Diciamo che le componenti lagrangiane delle forze Q_h ammettono un'energia potenziale generalizzata V se esiste una funzione $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ tale che

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t). \quad (7.9)$$

Se esiste una tale funzione V , allora definendo $L = T - V$ le equazioni di Lagrange (7.2) si possono scrivere nella forma (7.6).

Notiamo che, se esiste V che soddisfa (7.9), allora si ha

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = V_0(\mathbf{q}, t) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (7.10)$$

con V_h omogenea di grado h ($h = 0, 1$) nelle $\dot{\mathbf{q}}$, infatti per ogni $h = 1 \dots n$ si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot{q}_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h = \sum_{j=1}^N \mathcal{F}_j \cdot \frac{\partial \chi_j}{\partial q_h},$$

dove

$$\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t).$$

Poichè le forze attive \mathbf{F}_j agenti sui punti del sistema possono dipendere solo dalle loro posizioni e velocità e dal tempo, si ha necessariamente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad h, k = 1 \dots n. \quad (7.11)$$

Allora, integrando due volte la (7.11), si ottiene

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + V_0(\mathbf{q}, t), \quad (7.12)$$

per certe funzioni $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e V_0 . Se le componenti lagrangiane Q_h delle forze ammettono un potenziale generalizzato, allora dalle (7.9), (7.12) si ottiene

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) + B(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(\mathbf{q}, t),$$

dove $B(\mathbf{q}, t)$ è una matrice antisimmetrica, infatti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot{q}_h} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_h}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_h} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial a_h}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial q_h}. \end{aligned}$$

Proposizione 34. *Le forze apparenti ammettono l'energia potenziale generalizzata*

$$V' = m\vec{\mathbf{a}}_{O'} \cdot (P - O') - \frac{1}{2}m|\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')|^2 - m\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O') \cdot \vec{\mathbf{v}}', \quad (7.13)$$

Scrivendo i vettori in coordinate nella base \mathcal{B} si ha

$$V' = m\mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 - m\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} \cdot R\dot{\mathbf{q}}, \quad (7.14)$$

in cui \mathbf{q} rappresenta le coordinate cartesiane di $P - O'$ nella base \mathcal{B}' ed $R = (R_{ij})$ con $R_{ij} = \hat{\mathbf{e}}'_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$. In generale non si riesce a distinguere tra i termini relativi alle forze di trascinamento e quelli della forza di Coriolis.

Dimostrazione. La differenza delle energie cinetiche, T' nel riferimento Σ' e T nel riferimento Σ , ci fornisce un'espressione per l'energia potenziale delle forze apparenti che agiscono su un punto materiale di massa m . Per dimostrarlo basta scrivere le equazioni di Lagrange di prima specie per il punto materiale in Σ' ed in Σ , utilizzando le stesse coordinate lagrangiane. Assumendo che sul punto non agiscano forze nel riferimento Σ , si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} T' - \frac{\partial}{\partial q_h} T' = Q'_h, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} T - \frac{\partial}{\partial q_h} T = 0, \quad h = 1 \dots n,$$

dove Q'_h sono le componenti lagrangiane delle forze apparenti. Siccome le equazioni devono essere le stesse, per differenza si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} (T' - T) - \frac{\partial}{\partial q_h} (T' - T) = Q'_h \quad h = 1 \dots n.$$

Notiamo che i termini quadratici nelle velocità lagrangiane $\dot{\mathbf{q}}$ spariscono, infatti

$$\begin{aligned} T' - T &= \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{q}}|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}|^2 = \\ &= -\frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2 - \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 - m\mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}) - m\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} \cdot R\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

quindi possiamo scegliere $V' = T' - T$.

Utilizziamo adesso il Lemma 1. Il termine $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2$ è una funzione nota solo del tempo e può essere tralasciata. Inoltre si ha

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_{O'} \cdot R\mathbf{q} = \mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} + \mathbf{v}_{O'} \cdot (\dot{R}\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q} + \mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}}),$$

per cui possiamo sostituire $-m\mathbf{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q} + R\dot{\mathbf{q}})$ con $m\mathbf{a}_{O'} \cdot R\mathbf{q}$. □

Proposizione 35. *Nel caso particolare in cui $\vec{\omega}$ è costante possiamo definire separatamente un'energia potenziale per le forze di trascinamento $-m\vec{a}_{O'}$, $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O'))$, e per la forza di Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$.*

Dimostrazione. Considero un punto materiale di massa m con posizione $P - O'$, velocità \vec{v}' e accelerazione \vec{a}' relative a Σ' , e rappresentate dai vettori $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$ nella base \mathcal{B}' . Sia inoltre $\boldsymbol{\omega}$ il vettore delle coordinate della velocità angolare in \mathcal{B} . Vale il seguente

Lemma 2. *Se $\boldsymbol{\omega}$ è costante, esiste una matrice costante di rotazione R_0 tale che*

$$R_0 R^T \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}, \quad (7.15)$$

dove R è la matrice di cambiamento di base da \mathcal{B}' a \mathcal{B} .

Dimostrazione. Se $\boldsymbol{\omega}$ è costante in Σ allora è costante anche in Σ' . Consideriamo il sistema di riferimento $\Sigma'' = O' \hat{\boldsymbol{\eta}}'_1 \hat{\boldsymbol{\eta}}'_2 \hat{\boldsymbol{\eta}}'_3$, in cui

$$\boldsymbol{\eta}'_h = R_0 \mathbf{e}'_h$$

sono tali che $\boldsymbol{\eta}'_h(0) = \mathbf{e}_h$

Il vettore $\vec{\omega}$ è anche la velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ , e $\vec{\omega}$ è costante anche in Σ'' . Le coordinate di $\vec{\omega}$ nella base \mathcal{B}'' sono date da $R_0 R^T \boldsymbol{\omega}$; si ha dunque

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times R_0 R^T \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}.$$

Poichè per ipotesi si ha $R_0 R^T(0) = I$, cioè $R^T(0) = R_0^T$, sfruttando il fatto che $R_0 R^T$ è un'isometria ed usando la continuità delle componenti di R si ottiene

$$R_0 R^T \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}.$$

□

Nel seguito assumeremo per semplicità che $R_0 = I$, cioè che al tempo $t = 0$ l'orientazione del riferimento Σ' coincida con quella di Σ . Da questo segue anche che $R\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$.

Per ciascun termine \mathbf{F} delle forze apparenti

$$-m\ddot{\mathbf{x}}_{O'} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}}$$

cerchiamo una funzione V tale che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}, \quad (7.16)$$

con $\boldsymbol{\chi} = R\mathbf{q}$, per cui

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} = R\mathbf{e}_h = \mathbf{e}'_h,$$

e la (7.16) diventa

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}'_h,$$

devo ottenere quindi le componenti di \mathbf{F} nella base \mathcal{B}' .

La forza di trascinamento dovuta al moto di O' è

$$\mathbf{F}_{tr} = -m\ddot{\mathbf{x}}_{O'}.$$

Tale forza ammette l'energia potenziale

$$V'_{tr}(\mathbf{q}, t) = m\ddot{\mathbf{x}}_{O'} \cdot R\mathbf{q},$$

infatti

$$-\frac{\partial}{\partial q_h} V'_{tr} = -m\ddot{\mathbf{x}}_{O'} \cdot \mathbf{e}'_h.$$

La forza centrifuga è

$$\mathbf{F}_{centr} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}).$$

Tale forza ammette l'energia potenziale¹

$$V'_{centr}(\mathbf{q}, t) = -\frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}|^2 = -\frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2,$$

in cui abbiamo usato (7.15) ed il fatto che R è un'isometria. Infatti

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V'_{centr}}{\partial q_h} &= m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_h = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}_h = \\ &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) \cdot R^T \mathbf{e}'_h = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{q}) \cdot \mathbf{e}'_h = \mathbf{F}_{centr} \cdot \mathbf{e}'_h. \end{aligned}$$

La forza di Coriolis è

$$\mathbf{F}_{Cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}}.$$

Tale forza ammette l'energia potenziale generalizzata

$$V'_{Cor}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = mR\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}} = m\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}.$$

Infatti

$$\frac{\partial V'_{Cor}}{\partial q_h} = m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}_h = m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}'_h,$$

¹Dalla seconda espressione di V'_{centr} si nota che in effetti essa non dipende da t .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial V'_{Cor}}{\partial \dot{q}_h} &= m \frac{d}{dt} \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_h = \\ &= m \dot{\mathbf{q}} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_h = -m \boldsymbol{\omega} \times R \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}'_h,\end{aligned}$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V'_{Cor}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V'_{Cor}}{\partial q_h} = -2m \boldsymbol{\omega} \times R \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}'_h = \mathbf{F}_{Cor} \cdot \mathbf{e}'_h.$$

□

Consideriamo un sistema di N punti materiali $P_1 \dots P_N$ e assumiamo che su di essi agiscano delle forze $\mathbf{F}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$, $j = 1 \dots N$ che ammettono un'energia potenziale generalizzata $\mathcal{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$, cioè

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j.$$

Se il sistema di punti è soggetto a vincoli olonomi e per ogni t la mappa

$$\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$$

rappresenta una carta locale, allora la funzione

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t)$$

è un'energia potenziale generalizzata per le forze agenti sul sistema vincolato, infatti

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t),\end{aligned}$$

poiché

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Esempio 13. *Problema dei 3 corpi ristretto circolare piano nel sistema di riferimento ruotante con la binaria.*

Siano P_1, P_2 i due corpi principali, di masse m_1, m_2 rispettivamente, e assumiamo che questi si muovano su orbite circolari nel piano $O\hat{e}_1\hat{e}_2$. Sia a la distanza $|P_1 - P_2|$ e G la costante gravitazionale di Newton. Possiamo scegliere le unità di misura in modo che

$$a = 1, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad G = 1.$$

Poniamo $m = m_2$ e consideriamo il riferimento Σ' che si muove con la binaria P_1P_2 in modo tale che essa corrisponda alla direzione dell'asse Ox' (vedi figura). La velocità angolare di Σ' rispetto a Σ è $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_3$, con

$$\omega = 1$$

per la terza legge di Keplero applicata a P_1, P_2 . Inoltre, usando l'integrale del centro di massa, si ha

$$|P_1 - O| = m, \quad |P_2 - O| = 1 - m.$$

Siano $\mathbf{q} = (x', y')$ le coordinate del punto P_3 , di massa trascurabile, nel riferimento Σ' . L'energia potenziale per unità di massa delle forze che agiscono su P_3 è

$$\begin{aligned} V &= -\frac{(1-m)}{|P-P_1|} - \frac{m}{|P-P_2|} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2 - m\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \\ &= -\frac{(1-m)}{\sqrt{(x'-m)^2 + y'^2}} - \frac{m}{\sqrt{(x'-1+m)^2 + y'^2}} - \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - (x'y' - y'\dot{x}'). \end{aligned}$$

Capitolo 8

Simmetrie e integrali primi

In questo capitolo consideriamo sistemi lagrangiani della forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (8.1)$$

dove $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è una lagrangiana di classe C^2 e descriviamo la relazione tra l'invarianza di L per una famiglia ad un parametro di trasformazioni e l'esistenza di integrali primi di (8.1).

8.1 Variabili cicliche

Considero un sistema lagrangiano definito da $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

Definizione 24. *Se la coordinata q_k non appare esplicitamente nell'espressione di L allora si dice che q_k è ciclica, o ignorabile.*

Definizione 25. *Chiamiamo **momento coniugato** alla coordinata q_k la quantità*

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1 \dots n. \quad (8.2)$$

Proposizione 36. *Se la variabile q_k è ciclica in L , allora il corrispondente momento coniugato p_k definito da (8.2) è un integrale primo.*

Dimostrazione. Segue immediatamente da (8.1). □

Chiaramente la proprietà di avere una o più coordinate cicliche dipende dalla scelta delle coordinate, quindi non è una proprietà intrinseca del sistema lagrangiano considerato.

Anche quando la variabile temporale t non appare esplicitamente in L abbiamo una legge di conservazione. Vale infatti la seguente

Proposizione 37. (*Integrale di Jacobi*) Se la lagrangiana L non dipende da t allora la funzione

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (8.3)$$

è un integrale primo del sistema lagrangiano (8.1).

Dimostrazione.

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = 0$$

lungo le soluzioni di (8.1). □

Osserviamo che se la lagrangiana L è della forma

$$L_2 + L_1 + L_0$$

con L_j funzione omogenea di grado j in $\dot{\mathbf{q}}$, allora

$$J = L_2 - L_0.$$

Infatti, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee si ha

$$\dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial L_j}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = jL_j, \quad j = 0, 1, 2.$$

8.1.1 Riduzione di Routh

Assumiamo che $L = L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t)$ con $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_s)$ variabili cicliche e che $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}$ sia definita positiva. Consideriamo la soluzione

$$t \mapsto \mathbf{q}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$$

del sistema di equazioni di Lagrange definito da L , con condizioni iniziali

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{y}}_0$$

per $t = 0$. Siano

$$\mathbf{c} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{y}}_0, 0)$$

il valore del momento $\mathbf{p}_{\mathbf{x}}$, coniugato a \mathbf{x} , costante lungo la soluzione $\mathbf{q}(t)$, e

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})$$

la funzione definita implicitamente dalla relazione

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}, \mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c}), \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{c}$$

che si può definire grazie al fatto che

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{x}}^2} \neq 0. \quad (8.4)$$

Infatti la matrice $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{x}}^2}$ è definita positiva poiché è un minore principale di $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}$, che è definita positiva. In queste ipotesi vale la seguente:

Proposizione 38. *La mappa $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ è la soluzione delle equazioni di Lagrange definite dalla lagrangiana ridotta*

$$L_{\mathbf{c}}^R(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \left[L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) - \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})}$$

con condizioni iniziali

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \dot{\mathbf{y}}(0) = \dot{\mathbf{y}}_0$$

e la mappa $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ è definita da

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(\mathbf{y}(\tau), \dot{\mathbf{y}}(\tau), \tau, \mathbf{c}) d\tau. \quad (8.5)$$

Dimostrazione. Per la regola di derivazione di funzioni composte abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\mathbf{c}}^R}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) - \mathbf{c} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c}) \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})} \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})} \end{aligned}$$

lungo la componente $\mathbf{y}(t)$ della soluzione $\mathbf{q}(t)$. Analogamente lungo $\mathbf{y}(t)$ abbiamo

$$\frac{\partial L_{\mathbf{c}}^R}{\partial y_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \left[\frac{\partial L}{\partial y_h}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, t) \right] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})}.$$

Quindi la mappa $t \rightarrow \mathbf{y}(t)$ risolve le equazioni di Lagrange per $L_{\mathbf{c}}^R$. L'equazione (8.5) si ottiene immediatamente integrando la relazione

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), t, \mathbf{c}).$$

□

Osservazione 22. Se $L = \tilde{L}_2 + \tilde{L}_1 + \tilde{L}_0$, con \tilde{L}_j omogenea di grado j in $\dot{\mathbf{x}}$, allora per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee si ha

$$L_c^R = [-\tilde{L}_2 + \tilde{L}_0] \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t, \mathbf{c})}.$$

Esempio 14. (*moto centrale piano*) Usando coordinate polari ρ, θ la lagrangiana si scrive

$$L(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - V(\rho),$$

quindi la variabile θ è ciclica e il suo momento coniugato

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta}$$

è un integrale primo. Sia c il valore di tale integrale in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$\rho_0, \theta_0, \dot{\rho}_0, \dot{\theta}_0$$

assegnate al tempo $t = 0$. La lagrangiana ridotta è

$$L_c^R(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - V(\rho) - \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

Introducendo l'energia potenziale efficace

$$V_c^R(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

e usando la Proposizione 37 si ottiene che il sistema lagrangiano a un grado di libertà definito da L_c^R ha l'integrale primo

$$J_c^R(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_c^R(\rho),$$

che corrisponde all'integrale di Jacobi del sistema a due gradi di libertà ristretto al vincolo dato da $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = c$:

$$J_c^R(\rho, \dot{\rho}) = J\left(\rho, \dot{\rho}, \frac{c}{m\rho^2}\right)$$

Esempio 15. (*coordinate jacobiane nel piano*) Consideriamo tre punti di massa unitaria che si muovono nel piano sotto l'azione di forze elastiche, con energia potenziale

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{k}{2}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 + |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|^2 + |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|^2),$$

dove $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^2$ sono le coordinate cartesiane dei tre punti e $k > 0$ è una costante. Mostriamo che nelle coordinate $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$, definite dalle relazioni

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{3}, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2, \quad \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{2}, \quad (8.6)$$

la lagrangiana del sistema non dipende dalle due componenti di $\boldsymbol{\xi}$. Infatti, detta

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \mapsto (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3),$$

la trasformazione di coordinate definita in (8.6), la sua inversa ha componenti

$$\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\xi} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{x}_3 = \boldsymbol{\xi} + \frac{2}{3}\boldsymbol{\zeta}, \quad (8.7)$$

quindi l'energia potenziale $V = \mathcal{V} \circ \boldsymbol{\Phi}^{-1}$ nelle nuove coordinate si scrive

$$V(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = \frac{k}{2}(|\boldsymbol{\zeta} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{2}|^2 + |\boldsymbol{\zeta} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{2}|^2 + |\boldsymbol{\eta}|^2).$$

Inoltre, sollevando la (8.6) ai vettori velocità, possiamo scrivere l'energia cinetica come segue:

$$T = \frac{1}{2}(|\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + |\dot{\mathbf{x}}_2|^2 + |\dot{\mathbf{x}}_3|^2) = \frac{1}{2}(3|\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{\eta}}|^2 + \frac{2}{3}|\dot{\boldsymbol{\zeta}}|^2).$$

Osserviamo che la lagrangiana $L = T - V$ non dipende dal vettore $\boldsymbol{\xi}$.

8.2 Teorema di Noether

Ricordiamo le proprietà dell'azione $\phi : U \times G \rightarrow U$ di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi G su un insieme U . In particolare consideriamo $G = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^n$.

- i) $\phi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$;
- ii) $\phi_0 = \text{Id}$;
- iii) $\phi_{\alpha+\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

La (iii) si chiama proprietà di semigruppato.

Useremo anche la notazione $\phi(\mathbf{q}, \alpha)$ e assumeremo in seguito che le mappe ϕ siano di classe C^2 nella coppia di variabili (\mathbf{q}, α) .

Definizione 26. Dato un gruppo a un parametro di diffeomorfismi $\phi_\alpha(\mathbf{q})$, si dice **generatore infinitesimo dell'azione il vettore**

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0). \quad (8.8)$$

Proposizione 39. *Ogni azione è il flusso del suo generatore infinitesimo.*

Dimostrazione. La tesi segue dalla definizione di derivata e dalla proprietà di semigruppato:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, \alpha) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{q}, \alpha + h) - \phi(\mathbf{q}, \alpha)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\phi(\mathbf{q}, \alpha), h) - \phi(\phi(\mathbf{q}, \alpha), 0)}{h} = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\phi(\mathbf{q}, \alpha), 0) = \boldsymbol{\xi}(\phi(\mathbf{q}, \alpha)). \end{aligned}$$

□

Nel contesto delle varietà ho bisogno di restringermi ad un'azione locale (gruppo a un parametro locale di diffeomorfismi).

Si consideri l'azione di un gruppo G a un parametro locale di diffeomorfismi di classe C^2 sulla varietà delle configurazioni \mathcal{C} :

$$\mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q} = \phi_\alpha(\mathbf{q}) = \phi(\mathbf{q}, \alpha),$$

e la corrispondente azione indotta sul fibrato tangente $T\mathcal{C}$:

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto (\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \left(\phi(\mathbf{q}, \alpha), \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \alpha) \dot{\mathbf{q}} \right)$$

Vale il seguente

Teorema 3. (Noether) *Se la Lagrangiana $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ è invariante per l'azione indotta su $T\mathcal{C}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, cioè*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L\left(\phi(\mathbf{q}, \alpha), \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \alpha) \dot{\mathbf{q}}, t\right), \quad (8.9)$$

allora le equazioni di Lagrange ammettono l'integrale primo

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}). \quad (8.10)$$

dove $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ è il momento coniugato a \mathbf{q} e $\boldsymbol{\xi}$ è il generatore infinitesimo dell'azione ϕ_α , dato dalla (8.8).

Dimostrazione. Deriviamo la (8.9) rispetto ad α e valutiamo il risultato in $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} L\left(\phi(\mathbf{q}, \alpha), \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \alpha) \dot{\mathbf{q}}, t\right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, 0) \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

in cui abbiamo usato

$$\phi(\mathbf{q}, 0) = \mathbf{q}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, 0) = \text{Id.}$$

Lungo le soluzioni $t \rightarrow \mathbf{q}(t)$ dell'equazione di Lagrange, scambiando l'ordine di derivazione e ricordando la (8.8) si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, 0) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, 0) \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{q} \partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) \dot{\mathbf{q}} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) \right), \end{aligned}$$

quindi

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})$$

è un integrale primo del sistema lagrangiano. □

Esempio 16. Considero la lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{q}}|^2 - V(|\mathbf{q}|), \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3,$$

relativa al moto di un punto materiale P di massa m in \mathbb{R}^3 , soggetto ad una forza centrale, di centro l'origine del sistema di coordinate, con energia potenziale V . La lagrangiana L è invariante per l'azione $\phi(\mathbf{q}, \alpha) = R_\alpha(\mathbf{a})\mathbf{q}$ dove $R_\alpha(\mathbf{a})$ è la matrice di rotazione di un angolo α attorno all'asse $O\mathbf{a}$.

Il generatore infinitesimo dell'azione è

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \mathbf{a} \times \mathbf{q}$$

in quanto $R_\alpha(\mathbf{a}) = \exp(\alpha A)$, dove A è la matrice antisimmetrica associata ad \mathbf{a} tramite la relazione

$$A\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3,$$

come si vede calcolando esplicitamente la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}.$$

Dal Teorema di Noether si ottiene l'integrale primo

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m\mathbf{a} \times \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = m\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{a}$$

per ogni scelta di $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Dall'arbitrarietà di \mathbf{a} otteniamo quindi la conservazione del momento angolare rispetto al centro O .

Mostriamo adesso come si trasformano i flussi in corrispondenza ad un cambiamento di coordinate.

Proposizione 40. *Sia $\Phi^t(\mathbf{x})$ il flusso integrale dell'equazione differenziale*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (8.11)$$

ed $\mathbf{y} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ un cambiamento di coordinate. Sia inoltre

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y}), \quad (8.12)$$

con

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F} \right) \circ \mathbf{u}^{-1},$$

l'equazione differenziale corrispondente a (8.11) nelle coordinate \mathbf{y} . Allora la mappa

$$\Psi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{u} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y}) \quad (8.13)$$

è il flusso integrale di (8.12).

Dimostrazione. Derivando la mappa $\Psi^t(\mathbf{y})$ definita da (8.13) rispetto al tempo e usando la relazione

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{-1}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{G} \right) \circ \mathbf{u}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}(\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \frac{d}{dt}(\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}(\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \mathbf{F}(\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \right) (\Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) \mathbf{G}(\mathbf{u} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})) = \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{u} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y})). \end{aligned}$$

□

Nella dimostrazione della prossima Proposizione useremo il seguente risultato della teoria dei sistemi dinamici:

Teorema 4. *(rettificazione del flusso) Sia $(\mathbf{x}, t) \mapsto \Phi^t(\mathbf{x})$ il flusso dell'equazione differenziale*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

e assumiamo che esista $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$. Allora esiste un intorno \mathcal{U} di $\bar{\mathbf{x}}$ ed un cambiamento di coordinate locale

$$\mathcal{U} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V},$$

con \mathcal{V} intorno di $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}})$, tale che

$$\mathbf{u}^{-1} \circ \Psi^t(\mathbf{y}) = \Phi^t \circ \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{y}), \quad (8.14)$$

dove

$$\Psi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + t\mathbf{e}_1.$$

Dimostrazione. A meno di traslare l'origine e rinumerare le coordinate possiamo assumere che

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad F_1(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0,$$

dove F_1 è la prima componente di \mathbf{F} . Consideriamo la mappa

$$\mathbf{w}(\mathbf{y}) = \Phi^{y_1}(0, y_2, \dots, y_n).$$

Dalle relazioni

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_1}(\mathbf{0}) = \mathbf{F}(\mathbf{0}), \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_j}(\mathbf{0}) = \mathbf{e}_j, \quad j = 2 \dots n$$

si ottiene

$$\det \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{0}) = F_1(\mathbf{0}),$$

quindi \mathbf{w} definisce un diffeomorfismo locale da un intorno \mathcal{V} di $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ad un intorno \mathcal{U} di $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Poniamo $\mathbf{u} = \mathbf{w}^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$.

Ponendo

$$\Psi^t(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + t\mathbf{e}_1$$

e usando la proprietà di semigruppato del flusso si ottiene la (8.14), infatti

$$\mathbf{w} \circ \Psi^t(\mathbf{y}) = \Phi^{y_1+t}(0, y_2, \dots, y_n) = \Phi^t \circ \mathbf{w}(\mathbf{y}).$$

□

Proposizione 41. *Sia $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ una lagrangiana invariante per l'azione ϕ_α . Sia inoltre $\bar{\mathbf{q}}$ una configurazione per cui $\boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}) \neq \mathbf{0}$, dove $\boldsymbol{\xi}$ è il generatore infinitesimo di $\phi_\alpha(\mathbf{q})$. In queste ipotesi esiste un intorno \mathcal{U} di $\bar{\mathbf{q}}$ ed una trasformazione di coordinate*

$$\mathcal{U} \ni \mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q} = \Psi(\mathbf{q})$$

tale che la coordinata Q_1 (i.e. la prima componente di \mathbf{Q}) sia ciclica nella lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L(\Psi^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t), \quad (8.15)$$

che per la Proposizione 33 definisce la dinamica nelle coordinate \mathbf{Q} .

Dimostrazione. Considero $\bar{\mathbf{q}}$ tale che $\boldsymbol{\xi}(\bar{\mathbf{q}}) \neq \mathbf{0}$, con $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0)$. Per il teorema di rettificazione del flusso (vedi Teorema 4) possiamo trovare un cambiamento di coordinate $\mathbf{Q} = \Psi(\mathbf{q})$ in un intorno di $\bar{\mathbf{q}}$ tale che nelle coordinate \mathbf{Q} l'azione ϕ_α , che è il flusso del suo generatore infinitesimo, si scriva nella forma

$$\boldsymbol{\eta}_t(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + t\mathbf{e}_1.$$

Per la Proposizione 40 abbiamo anche

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha = \Psi \circ \phi_\alpha \circ \Psi^{-1}.$$

Inoltre la lagrangiana \mathcal{L} , definita da (8.15), è invariante per l'azione $\boldsymbol{\eta}_\alpha$, infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) &= L\left(\Psi^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right) = \\ &= L\left(\phi_\alpha \circ \Psi^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \circ \Psi^{-1}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t\right) = \\ &= L(\Psi^{-1} \circ \boldsymbol{\eta}_\alpha(\mathbf{Q}), \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}} \circ \boldsymbol{\eta}_\alpha(\mathbf{Q}) \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_\alpha}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t) = \\ &= \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_\alpha(\mathbf{Q}), \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_\alpha}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{Q} + \alpha\mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{Q}}, t). \end{aligned}$$

Infatti, da

$$\Psi^{-1} \circ \boldsymbol{\eta}_\alpha = \phi_\alpha \circ \Psi^{-1}$$

si ha

$$\frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}} \circ \boldsymbol{\eta}_\alpha(\mathbf{Q}) \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_\alpha}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \circ \Psi^{-1}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}.$$

Ne segue che \mathcal{L} è indipendente da Q_1 , infatti

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{Q} + h\mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{Q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)}{h} = 0.$$

□

Capitolo 9

Equilibri e stabilità

Considero le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (9.1)$$

per vincoli fissi, cioè $T = T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$, e per forze non dipendenti da t . Le (9.1) si possono scrivere nel modo seguente:

$$A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (9.2)$$

con

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{d}{dt} [A(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}}.$$

Poiché A è definita positiva, le (9.2) si possono mettere in forma normale ed equivalgono al sistema di equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \end{cases} \quad (9.3)$$

Poiché $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{0})$, i punti di equilibrio sono della forma $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$, con

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (9.4)$$

I valori \mathbf{q}_0 , soluzioni di (9.4), si chiamano **configurazioni di equilibrio**.

Se le forze attive derivano da un'energia potenziale generalizzata $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V_0(\mathbf{q}) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, con $V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{a}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$, possiamo scrivere la lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

In questo caso l'equazione

$$\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = 0 \quad (9.5)$$

definisce le configurazioni di equilibrio, infatti dalla relazione

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}$$

si ottiene

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}).$$

9.1 Linearizzazione attorno a un equilibrio

Considero un punto di equilibrio $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ ed analizzo la sua stabilità linearizzando le equazioni (9.3) attorno ad esso.

Le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}_0) \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})\mathbf{v} \right] \end{cases} \quad (9.6)$$

Se le forze attive derivano dall'energia potenziale $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V_0(\mathbf{q}) + \mathbf{a}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$ si ha $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) + B(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ (vedi Sezione 7.4) e le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -A^{-1}(\mathbf{q}_0) [V_0''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - B(\mathbf{q}_0)\mathbf{v}] \end{cases} \quad (9.7)$$

dove B è antisimmetrica con componenti $B_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}$. Le (9.7) sono le equazioni di Lagrange per la funzione

$$\begin{aligned} L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}_0) \dot{\mathbf{q}} - V_0(\mathbf{q}_0) - \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \cdot V_0''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \\ &\quad - \left[\mathbf{a}(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \right] \cdot \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (9.8)$$

che è lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ in $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$. Verifichiamo che le (9.7) corrispondono alle equazioni di Lagrange per L_0 . Dalle relazioni

$$\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = A(\mathbf{q}_0) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{a}(\mathbf{q}_0) - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), \quad \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{q}} = -V_0''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) \right]^T \dot{\mathbf{q}}$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{q}} = A(\mathbf{q}_0) \ddot{\mathbf{q}} - \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) - \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) \right]^T \right) \dot{\mathbf{q}} + V_0''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0),$$

che dimostra che le equazioni di Lagrange per L_0 corrispondono alle (9.7).

Nel caso particolare in cui $V = V_0$ si ottiene

$$L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}_0) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \cdot V''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0). \quad (9.9)$$

Le equazioni di Lagrange per (9.9) sono

$$A(\mathbf{q}_0) \ddot{\mathbf{q}} + V''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = \mathbf{0} \quad (9.10)$$

e si possono scrivere come

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \Lambda(\mathbf{q}_0) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}, \quad (9.11)$$

con

$$\Lambda(\mathbf{q}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -A^{-1}V''(\mathbf{q}_0) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}.$$

In questo caso la matrice del sistema linearizzato ha autovalori che dipendono solo dagli autovalori di $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$. Siccome $A(\mathbf{q}_0)$, $V''(\mathbf{q}_0)$ sono simmetriche, con A definita positiva, sappiamo (vedi Sezione 9.7) che gli autovalori λ_h di $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ sono reali e che possiamo trovare una base di autovettori $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_h\}_{h=1\dots n}$ ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da $A(\mathbf{q}_0)$, cioè tali che

$$\mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}_k = \delta_{hk}.$$

Tali autovalori si possono calcolare risolvendo l' **equazione secolare**

$$\det(V''(\mathbf{q}_0) - \lambda A(\mathbf{q}_0)) = 0,$$

evitando quindi di calcolare $A^{-1}(\mathbf{q}_0)$. Inoltre si ha

$$\mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_h \cdot \lambda_k A(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}_k = \lambda_k \delta_{hk},$$

cioè nella base \mathcal{B} entrambe le matrici $A(\mathbf{q}_0)$, $V''(\mathbf{q}_0)$ sono in forma diagonale.

Se $\{\lambda_h\}_{h=1\dots n}$, sono gli autovalori di $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ allora gli autovalori di $\Lambda(\mathbf{q}_0)$ sono

$$\pm \sqrt{-\lambda_h}, \quad h = 1 \dots n.$$

In particolare, se $\lambda_k < 0$ per qualche k allora $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è instabile perché il sistema (9.11) ha un esponente di Lyapounov positivo.

Se $\lambda_h > 0$ per $h = 1 \dots n$ allora gli esponenti di Lyapounov sono tutti nulli ed il metodo di linearizzazione non ci permette di concludere sulla stabilità di \mathbf{q}_0 . In questo caso possiamo usare il metodo della funzione di Lyapounov, come discusso nella prossima sezione.

9.2 Il teorema di Lagrange-Dirichlet

Si consideri un punto di equilibrio \mathbf{x}_0 del sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (9.12)$$

Definizione 27. Una funzione $f \in C^1(U; \mathbb{R})$, definita in un intorno U di un punto di equilibrio \mathbf{x}_0 di (9.12), è una funzione di Lyapounov per \mathbf{x}_0 se valgono le seguenti proprietà:

i) $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$ per ogni $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$;

ii) $\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in U$.

Vale il seguente risultato:

Teorema 5. (Lyapounov) Se un punto di equilibrio ammette una funzione di Lyapounov, allora è stabile.

Dimostrazione. ...

□

Teorema 6. Considero il sistema lagrangiano definito da

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V_0(\mathbf{q}) - V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (9.13)$$

Se \mathbf{q}_0 è un minimo locale stretto di V_0 allora è una configurazione di equilibrio stabile.

Dimostrazione. Si osserva che \mathbf{q}_0 è una configurazione di equilibrio in quanto soddisfa (9.5). Siccome la lagrangiana (9.13) non dipende da t , allora la funzione

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + V_0(\mathbf{q}).$$

è un integrale primo delle equazioni di Lagrange per L (integrale di Jacobi). Inoltre $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è un punto di minimo locale stretto per $J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, quindi si può usare $J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ come funzione di Lyapounov relativa al punto $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ restringendola ad un opportuno intorno di tale punto.

□

9.3 Analisi della stabilità dei sistemi lagrangiani

Nel caso in cui le forze generalizzate siano conservative, con energia potenziale $V = V_0(\mathbf{q})$, l'analisi del solo spettro di $V''(\mathbf{q}_0)$, dove \mathbf{q}_0 è una configurazione di equilibrio, ci può permettere di studiare la stabilità dei punti di equilibrio di (9.11).

Se $V''(\mathbf{q}_0)$ ha tutti gli autovalori positivi allora \mathbf{q}_0 è un minimo stretto (non degenere) di V , quindi il punto $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Se $V''(\mathbf{q}_0)$ ha un autovalore $\mu < 0$ con autovettore \mathbf{v} , sia $\mathbf{v} = \sum_h v_h \mathbf{u}_h$ l'espressione di \mathbf{v} come combinazione lineare degli elementi della base \mathcal{B} . Allora

$$\begin{aligned} 0 > \mu |\mathbf{v}|^2 &= \mathbf{v} \cdot V''(\mathbf{q}_0) \mathbf{v} = \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}_k = \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \lambda_k \mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}_k = \\ &= \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \lambda_k \delta_{hk} = \sum_{h=1}^n v_h^2 \lambda_h, \end{aligned}$$

quindi esiste k con $\lambda_k < 0$ ed il punto $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è instabile.

9.4 Stabilizzazione con termini girostatici

Se le componenti lagrangiane delle forze attive ammettono un energia potenziale generalizzata $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = V_0(\mathbf{q}, t) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è possibile che un punto di massimo di V_0 sia stabile: infatti la presenza del termine V_1 modifica lo spettro del linearizzato, anche se non modifica gli equilibri. Questo fenomeno si chiama **stabilizzazione girostatica**.

Esempio 17. (*oscillatore armonico in un riferimento rotante*)

Fissiamo un sistema di riferimento $\Sigma = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$ in \mathbb{R}^3 . Consideriamo un punto materiale di massa m collegato all'origine O del riferimento da una molla di costante elastica k . Scegliamo delle condizioni iniziali $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$ per il punto al tempo $t = 0$. Siccome il campo di forze è centrale, dalla conservazione del momento angolare sappiamo che il moto è piano. Possiamo quindi orientare il riferimento Σ in modo tale che, per queste condizioni iniziali, il moto avvenga nel piano Oxy . Consideriamo adesso un riferimento $\Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$, con $O' = O$, e con velocità angolare costante $\vec{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_3$, $\omega \neq 0$, rispetto a Σ .

La stabilità dell'origine per l'oscillatore armonico è nota a priori in Σ , e vale anche in Σ' . Introduciamo coordinate cartesiane $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ relative a Σ' e studiamo la stabilità dell'equilibrio $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ nel riferimento rotante con il metodo della linearizzazione.

L'energia potenziale, tenendo conto delle forze apparenti, è

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} k |\mathbf{q}|^2 - \frac{1}{2} m |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2 + m \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot (kI + m\Omega^2) \mathbf{q} + m \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}, \quad (9.14)$$

con

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Possiamo scrivere la (9.14) come $V = V_0 + V_1$, con V_j omogenea di grado j in $\dot{\mathbf{q}}$.

Gli equilibri (in questo caso solo $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$) si ottengono cercando i punti critici di V_0 . Se $\omega^2 > \frac{k}{m}$ allora V_0'' ha autovalori negativi, quindi se considerassimo solo il termine V_0 per lo studio della stabilità si otterrebbe che l'origine è instabile.

Includiamo adesso anche V_1 nello studio della stabilità. Le equazioni del moto corrispondenti all'energia potenziale (9.14) si scrivono

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{k}{m}\mathbf{q} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}$$

oppure, come sistema del primo ordine,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(\frac{k}{m}I + \Omega^2) & -2\Omega \end{bmatrix}.$$

Dato che la terza componente di \mathbf{q} e di $\dot{\mathbf{q}}$ è identicamente nulla, possiamo descrivere il moto con il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \beta I & -2\omega J \end{bmatrix},$$

dove

$$\mathbf{z} = (q_1, q_2)^T, \quad \beta = \omega^2 - \frac{k}{m}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di Γ si ottengono dall'equazione

$$\det(\Gamma - \lambda I) = \lambda^4 + 2(2\omega^2 - \beta)\lambda^2 + \beta^2 = 0. \quad (9.15)$$

Il discriminante è

$$\Delta = 16\omega^2(\omega^2 - \beta) = 16\omega^2\frac{k}{m} > 0,$$

quindi le radici λ^2 di (9.15) sono reali e distinte. Inoltre, dato che $2\omega^2 > \beta$, per la regola dei segni di Cartesio le radici λ^2 sono negative o nulle e gli autovalori di Γ sono immaginari puri o nulli:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega', \quad \omega' \neq \omega.$$

Da questa analisi spettrale non possiamo concludere la stabilità dell'origine, però non possiamo nemmeno escluderla.

Osservazione 23. L'esempio precedente mostra che nel teorema di Lagrange-Dirichlet l'ipotesi che \mathbf{q}_0 sia un punto di minimo stretto per V_0 è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la stabilità di \mathbf{q}_0 , infatti

$$V_0'' = kI + m\Omega^2 = (k - m\omega^2)I$$

e, se $\omega > \sqrt{k/m}$, allora $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ è un punto di massimo per V_0 .

9.5 Piccole oscillazioni attorno a un equilibrio stabile

Assumiamo che la lagrangiana abbia la forma

$$L = T_2 - V_0,$$

e che \mathbf{q}_0 sia un minimo non degenere di V_0 .

Calcolo gli autovalori generalizzati λ_h , $h = 1 \dots n$, soluzioni di

$$\det(V''(\mathbf{q}_0) - \lambda A(\mathbf{q}_0)) = 0.$$

Osservo che i λ_k sono tutti > 0 , infatti

$$\lambda_h = \lambda_h \mathbf{u}_h \cdot A \mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h \cdot V'' \mathbf{u}_h.$$

La soluzione generale del sistema (9.10) è

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \sum_{h=0}^n c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h) \mathbf{u}_h$$

con $c_h \geq 0$, $\varphi_h \in S^1$, $\omega_h = \sqrt{\lambda_h} > 0$.

Le quantità ω_h si chiamano **frequenze proprie** del sistema e le famiglie di soluzioni particolari

$$c_h \cos(\omega_h t + \phi_h) \mathbf{u}_h, \quad h = 1 \dots n$$

si chiamano **modi normali** di oscillazione attorno all'equilibrio \mathbf{q}_0 .

9.6 Alcuni esempi

Esempio 18. *Si consideri il sistema meccanico in Figura 9.1. Calcolare tutti gli equilibri e studiarne la stabilità al variare dei parametri.*

L'energia potenziale è data da

$$\begin{aligned} V(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} k_1 (|P - A|^2 + |Q - B|^2) + \frac{1}{2} k_2 |P - Q|^2 \\ &= 2k_1 (\cos \phi - \cos \theta) - k_2 \cos(\phi - \theta) + \text{costante}. \end{aligned}$$

Gli equilibri sono le soluzioni di

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta, \phi) &= 2k_1 \sin \theta - k_2 \sin(\phi - \theta) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi}(\theta, \phi) &= -2k_1 \sin \phi + k_2 \sin(\phi - \theta) = 0 \end{aligned}$$

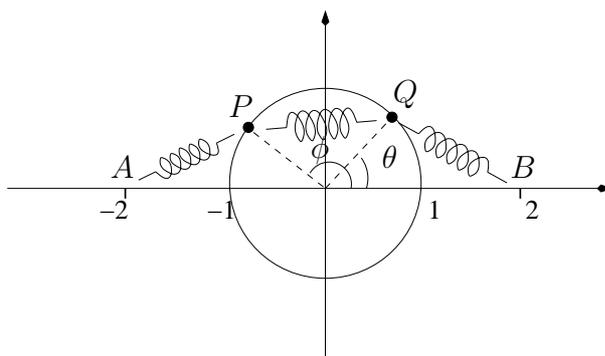


Figura 9.1:

Sommando le due equazioni si ha

$$\sin \theta = \sin \phi \quad (9.16)$$

e sostituendo nella prima

$$\sin \theta [2k_1 + k_2(\cos \phi - \cos \theta)] = 0$$

Abbiamo quindi le quattro configurazioni di equilibrio

$$(\theta, \phi) = (0, 0); \quad (0, \pi); \quad (\pi, 0); \quad (\pi, \pi) \quad (9.17)$$

e, se $k_1 < k_2$, anche le due configurazioni $(\theta, \phi) = (\bar{\theta}, \bar{\phi})$, con $\bar{\theta}$ soluzione di $\cos \theta = k_1/k_2$ e $\bar{\phi} = \pi - \bar{\theta}$. Studiamo la stabilità di questi equilibri. Le derivate seconde di V sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta, \phi) &= 2k_1 \cos \theta + k_2 \cos(\phi - \theta) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \theta}(\theta, \phi) &= -k_2 \cos(\phi - \theta) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}(\theta, \phi) &= -2k_1 \cos \phi + k_2 \cos(\phi - \theta). \end{aligned}$$

Considero la matrice hessiana V'' di V valutata nelle configurazioni di equilibrio (9.17):

$$\begin{aligned} V''(0, 0) &= \begin{bmatrix} 2k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -2k_1 + k_2 \end{bmatrix}, & V''(0, \pi) &= \begin{bmatrix} 2k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & 2k_1 - k_2 \end{bmatrix}, \\ V''(\pi, 0) &= \begin{bmatrix} -2k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & -2k_1 - k_2 \end{bmatrix}, & V''(\pi, \pi) &= \begin{bmatrix} -2k_1 + k_2 & k_2 \\ k_2 & 2k_1 + k_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dalle relazioni

$$\begin{aligned} \det V''(0, 0) &= -4k_1^2, & \det V''(\pi, \pi) &= -4k_1^2, \\ \det V''(\pi, 0) &= 4k_1(k_1 + k_2), & \text{tr} V''(\pi, 0) &= -2(2k_1 + k_2) \end{aligned}$$

si ottiene che $(0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi)$ sono instabili, poiché in tali punti V'' ha almeno un autovalore < 0 .

Invece, dalle relazioni

$$\det V''(0, \pi) = 4k_1(k_1 - k_2), \quad \text{tr} V''(0, \pi) = 2(2k_1 - k_2),$$

si ha che la configurazione $(0, \pi)$ è stabile se $k_1 > k_2$, instabile se $k_1 < k_2$.

Infine, osservando che $\cos(\bar{\phi} - \bar{\theta}) = \cos(\pi - 2\bar{\theta}) = -\cos^2 \bar{\theta} + \sin^2 \bar{\theta}$ si ottiene

$$V''(\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta}) = V''(-\bar{\theta}, \pi + \bar{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{k_1^2}{k_2} + k_2 \sin^2 \bar{\theta} & \frac{k_1^2}{k_2} - k_2 \sin^2 \bar{\theta} \\ \frac{k_1^2}{k_2} - k_2 \sin^2 \bar{\theta} & \frac{k_1^2}{k_2} + k_2 \sin^2 \bar{\theta} \end{bmatrix},$$

da cui

$$\det V''(\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta}) = 4k_1^2 \sin^2 \bar{\theta} > 0, \quad \text{tr} V''(\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta}) = 2\left(\frac{k_1^2}{k_2} + k_2 \sin^2 \bar{\theta}\right) > 0.$$

Si osserva che c'è una biforcazione per $k_1 = k_2$: l'equilibrio $(\theta, \phi) = (0, \pi)$ da stabile diventa instabile e nascono due nuovi equilibri stabili $(\theta, \phi) = (\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta}), (\pi - \bar{\theta}, \bar{\theta})$.

Esempio 19. Nel piano Oxy si consideri il sistema meccanico formato da n punti materiali $P_1 \dots P_n$ di ugual massa m . Il punto P_i è vincolato a muoversi sulla retta $x = i$, $i = 1 \dots n$. Inoltre ogni P_i è collegato ai punti P_{i-1} e P_{i+1} da due molle di costante elastica k , dove si è posto $P_0 \equiv (0, 0), P_{n+1} \equiv (n+1, 0)$. Si usano come coordinate i valori $q_i = y_i, i = 1 \dots n$ delle ordinate dei punti P_i . Scrivere le equazioni di Lagrange, trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

L'energia cinetica e potenziale del sistema sono

$$T = \frac{1}{2}m \sum_{h=1}^n \dot{q}_h^2, \quad V = \frac{1}{2}k \sum_{h=0}^n |P_{h+1} - P_h|^2 = \frac{1}{2}k \sum_{h=0}^n (q_{h+1} - q_h)^2 + \text{costante}$$

dove $q_0 = q_{n+1} = 0$.

Dimostriamo che l'unica configurazione di equilibrio è $(y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)$. Gli equilibri sono soluzioni di

$$V_{q_h} = -k(q_{h+1} - 2q_h + q_{h-1}) = 0, \quad h = 1 \dots n.$$

Ottengo il sistema lineare $M\mathbf{q} = 0$, con

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sia λ un autovalore di M , con autovettore \mathbf{v} . Allora

$$\mathbf{v} \cdot M\mathbf{v} = 2 \left(\sum_{h=1}^n v_h^2 - \sum_{h=1}^n v_{h+1}v_h \right) = [(v_1 - v_2)^2 + \dots + (v_{n-1} - v_n)^2 + v_1^2 + v_n^2] \geq 0$$

ed è nullo solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Questo ci dice che M è definita positiva, quindi $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ è l'unica soluzione di $M\mathbf{q} = 0$.

Tale configurazione di equilibrio è stabile, come si vede applicando il teorema di Lagrange-Dirichlet, dato che V ha sicuramente un minimo stretto in $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Gli autovalori della matrice hessiana $V'' = kM$ sono tutti positivi e distinti.

9.7 Diagonalizzazione simultanea di forme quadratiche

Considero le forme quadratiche

$$a(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot B\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

con A, B matrici di ordine n simmetriche, A definita positiva. L'insieme di livello

$$\mathcal{E}_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a(\mathbf{x}) = 1\}$$

è un ellissoide, quindi è compatto. Dunque esiste $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}_A$ tale che

$$b(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A} b(\mathbf{x}).$$

Il vettore \mathbf{x}_1 è un punto stazionario di $b(\mathbf{x})$, vincolato a \mathcal{E}_A . Dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ottiene

$$B\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{(1)} A\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_1 \cdot A\mathbf{x}_1 = 1,$$

per cui $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}_A$ è autovettore di $A^{-1}B$ con autovalore $\lambda_1^{(1)} = b(\mathbf{x}_1)$.

Sia $\mathcal{S}^{n-1} = \mathbf{x}_1^\perp$ il sottospazio di dimensione $n - 1$ costituito dai vettori di \mathbb{R}^n ortogonali a \mathbf{x}_1 rispetto al prodotto scalare definito da A . Denoto con $\mathcal{E}_A^{n-2} = \mathcal{E}_A \cap \mathcal{S}^{n-1}$ l'ellissoide di dimensione $n - 2$ e cerco \mathbf{x}_2 tale che

$$b(\mathbf{x}_2) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A^{n-2}} b(\mathbf{x}).$$

Dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$B\mathbf{x}_2 = \lambda_2^{(2)} A\mathbf{x}_2 + \lambda_1^{(2)} A\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_2 = 1, \quad \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_1 = 0. \quad (9.18)$$

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{x}_1 la prima delle (9.18) e usando la simmetria di A e B si ottiene

$$\lambda_1^{(2)} = \mathbf{x}_1 \cdot B\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 \cdot B\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{(1)} \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_1 = 0,$$

per cui $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}_A^{n-2}$ è autovettore di $A^{-1}B$ con autovalore $\lambda_2^{(2)} = b(\mathbf{x}_2)$. Tale procedimento si può iterare cercando per ogni $k = 3 \dots n$ un vettore $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$b(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A^{n-k}} b(\mathbf{x}),$$

con $\mathcal{E}_A^{n-k} = \mathcal{E}_A \cap \mathcal{S}^{n-k+1}$, ed \mathcal{S}^{n-k+1} il sottospazio di dimensione $n-k+1$ costituito dai vettori di \mathbb{R}^n ortogonali a $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ rispetto al prodotto scalare definito da A . In questo modo trovo una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ di autovettori di $A^{-1}B$ ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da A , con autovalori reali

$$\lambda_1 = b(\mathbf{x}_1), \quad \lambda_2 = b(\mathbf{x}_2), \quad \dots \quad \lambda_n = b(\mathbf{x}_n),$$

dove $\lambda_j = \lambda_j^{(j)}$. Per calcolare esplicitamente gli autovalori λ_j si risolve l'**equazione secolare**

$$\det(B - \lambda A) = 0.$$

Denoto con U la trasposta della matrice che ha come colonne i vettori della base \mathcal{B} . Osservo che si ha

$$U^T A U = I, \quad U^T B U = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n), \quad (9.19)$$

infatti $\mathbf{x}_i \cdot A\mathbf{x}_j = \delta_{ij}$ e $\mathbf{x}_i \cdot B\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_i \cdot A\mathbf{x}_j = \lambda_j \delta_{ij}$.

9.8 Equilibri relativi nel problema dei 3 corpi ristretto circolare piano

Scegliendo le unità di misura in modo che

$$m_1 + m_2 = 1, \quad |P_1 - P_2| = 1, \quad G = 1$$

si ottiene la lagrangiana indipendente dal tempo

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - V(q_1, q_2)$$

dove

$$V(q_1, q_2) = -\frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - (q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1) - \frac{1-m}{r_1} - \frac{m}{r_2},$$

con

$$r_1 = \sqrt{(q_1 - m)^2 + q_2^2}, \quad r_2 = \sqrt{(q_1 - 1 + m)^2 + q_2^2}.$$

Posso anche scrivere

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}((\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_1)^2) - U(q_1, q_2)$$

$$U(q_1, q_2) = -\frac{1-m}{r_1} - \frac{m}{r_2}.$$

Equazioni di Lagrange

$$\ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 = -\bar{U}_{q_1}, \quad \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 = -\bar{U}_{q_2},$$

dove

$$\bar{U}(q_1, q_2) = -\frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + U(q_1, q_2)$$

Siccome la lagrangiana non dipende dal tempo, abbiamo l'integrale di Jacobi

$$J(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \bar{U}(q_1, q_2)$$

Considero l'insieme di livello

$$\mathcal{M}_{m,h} = \{(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) | J(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = h\}$$

Regioni di Hill

Proiezione di $\mathcal{M}_{m,h}$ sullo spazio delle configurazioni nel sistema rotante:

$$M_{m,h} = \{(q_1, q_2) | \bar{U}(q_1, q_2) \leq h\}$$

La frontiera $\partial M_{m,h}$ è costituita dalle curve a velocità zero.

Bibliografia

- [1] Albouy, A.: *Lectures on the two-body problem*, in *Classical and Celestial Mechanics (the Recife lectures)*, H. Cabral and F. Diacu eds., Princeton University press, 2002
- [2] Albouy, A., Chenciner, A.: *Le problème des n corps et les distances mutuelles*, Invent. Math. 131, no. 1, 151–184, 1998
- [3] Arnol'd, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer
- [4] Arnol'd, V. I., Avez, A.: *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique*, Gauthier-Villars Paris, 1967
- [5] Arnol'd, V. I., Kozlov, V. V., Neishtadt, A.: *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Dynamical Systems III Encycl. Math. Sciences. 3rd edition, Springer
- [6] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A. *Appunti di Meccanica Razionale*
- [7] Bertrand, J. *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*, C. R. Acad. Sci. **77**, 849-853 (1873)
- [8] Fasano, A., Marmi, S.: *Meccanica Analitica*, Bollati Boringhieri
- [9] Gallavotti, G.: *Meccanica Elementare*, Bollati Boringhieri
- [10] Goldstein: *Classical Mechanics* *** c'e' anche il nuovo libro di Goldstein, Poole, Safko ***
- [11] Hamilton R.: 1837 (articolo che introduce l'equazione di HJ)
- [12] Jacobi K.: 1841 (articolo che introduce l'equazione di HJ e le trasformazioni canoniche)
- [13] Lagrange, J. L. *Essai sur le Problème des trois Corps*, Oeuvres de Lagrange, volume: Tome 6, 229–332, 1772

- [14] Levi, M. *Geometric Phases in the Motion of Rigid Bodies*, Arch. Rational Mech. Anal. **122** 213-229, 1993
- [15] Montgomery, R. *How much does the rigid body rotate? A Berry's phase from the 18th century*, Am. J. of Phys. **59** (5), 1991
- [16] Picasso, L. E.: *Lezioni di Fisica Generale I*, ETS editore, Pisa
- [17] Siegel C. L., Moser, J.: *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer
- [18] Whittaker *A treatise on the Analytic Dynamics of Particles and Rigid Bodies*

Indice analitico

- accelerazione centripeta, 29
- accelerazione di Coriolis, 29
- accelerazione di trascinamento, 29
- asse istantaneo di rotazione, 67

- base principale, 72

- campo conservativo, 22
- campo di forze centrale, 31
- centro istantaneo di rotazione, 69
- configurazioni di equilibrio, 125
- coordinata ciclica, 115
- corpo rigido discreto, 63

- determinismo meccanicistico, 17
- direzioni, 72

- ellissoide di inerzia, 83
- energia totale, 57
- equazione secolare, 127, 135
- equazioni cardinali, 54
- erpoloide, 84

- formule di Poisson, 25
- forze esterne, 53
- forze generalizzate, 102
- forze interne, 53
- frequenze proprie, 131
- funzione omogenea, 59

- generatore infinitesimo, 119
- gruppo di Galileo, 18

- lagrangiana, 105
- legge delle aree, 34
- linea dei nodi, 137

- massa ridotta, 38
- modi normali, 131
- momenti principali di inerzia, 72
- momento assiale, 23
- momento coniugato, 115
- momento di inerzia, 61, 71
- moti per inerzia, 82
- moto elicoidale, 69
- moto rigido piano, 69

- operatore di inerzia, 70

- poloide, 84
- principio di relatività, 19
- principio di azione e reazione, 53
- principio di d'Alembert, 98
- principio di inerzia, 20
- principio di sovrapposizione, 17
- prodotto vettoriale, 14

- reazioni vincolari, 95
- riferimenti inerziali, 19
- riferimento del baricentro, 50
- riferimento solidale, 64
- rotazioni stazionarie, 86

- semigruppò, 119
- sistema di riferimento, 15
- sistema lagrangiano conservativo, 105
- sistema meccanico classico, 20
- sistemi integrabili, 32
- sistemi isolati, 21
- sistemi lagrangiani, 105
- sistemi meccanici conservativi, 57
- spazio degli stati, 19

spazio-tempo di Galileo, 13
stabilizzazione girostatica, 129

terna levogira, 15

velocità virtuali, 97