

Capitolo 6

Sistemi vincolati

Definizione 16. *Un sistema di N punti materiali è vincolato se l'insieme delle fasi (posizioni e velocità) ammissibili al tempo t è ristretto ad un sottoinsieme \mathcal{F}_t di $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$.*

Se $\mathcal{F}_t \subset \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ non varia con t i vincoli si dicono *fissi* o *scleronomi*. Altrimenti si hanno vincoli *mobili* o *reonomi*.

Nei modelli dei problemi meccanici che consideriamo, gli insiemi \mathcal{F}_t hanno una struttura di varietà differenziabile e, in caso di vincoli mobili, la famiglia $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è costituita da varietà diffeomorfe tra loro.

Inoltre la restrizione ad un sottoinsieme dello spazio delle fasi si ottiene imponendo delle relazioni che legano le posizioni \mathbf{x} degli N punti e le loro velocità al tempo t , della forma

$$\Phi(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (6.1)$$

con

$$\begin{cases} \Phi \in C^2(\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^k), \\ B \in C^2(\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}; \mathcal{M}(k, 3N)), \end{cases} \quad 1 \leq k \leq 3N.$$

Osserviamo che l'equazione (6.1) può essere conseguenza di una relazione che lega le sole posizioni e il tempo:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad (6.2)$$

con $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^k)$, $1 \leq k \leq 3N$. Questo accade se si ha

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad B(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (6.3)$$

e si dice che l'equazione del vincolo è integrabile.

D'altra parte, se si impone la relazione (6.2), che lega tra loro soltanto le posizioni e il tempo, questa implica una relazione della forma (6.1) dove Ψ , B sono dati da (6.3).

Richiamiamo adesso alcune definizioni di carattere geometrico, utili per lo sviluppo della teoria dei moti vincolati.

6.1 Varietà differenziabili e spazi tangenti in \mathbb{R}^m

SOTTOVARIETÀ DI \mathbb{R}^m

Sia $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ una mappa differenziabile, con $k \leq m$. Diciamo che

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

è una sottovarietà di \mathbb{R}^m di dimensione $n = m - k$ se

$$\text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}.$$

Nell'intorno di ogni punto di \mathcal{C} possiamo introdurre coordinate locali $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_n)$ tramite le carte locali

$$\mathbb{R}^n \supseteq U \ni \mathbf{q} \mapsto \varphi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m, \quad \text{rank} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) = n, \quad (6.4)$$

definite su aperti U di \mathbb{R}^n .

VETTORI TANGENTI A \mathcal{C}

Dato un sistema di coordinate locali $\mathbf{q} \mapsto \varphi(\mathbf{q})$ su \mathcal{C} possiamo introdurre in modo naturale delle coordinate locali $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)$ sugli spazi tangenti $T_{\varphi(\mathbf{q})}\mathcal{C}$. Infatti i vettori

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}(\mathbf{q}), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial q_n}(\mathbf{q})$$

formano una base di $T_{\varphi(\mathbf{q})}\mathcal{C}$, per cui un generico vettore \mathbf{v} , tangente a \mathcal{C} in $\varphi(\mathbf{q})$, si scrive in modo unico come combinazione lineare

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial \varphi}{\partial q_h}(\mathbf{q}) \quad (6.5)$$

con coefficienti \dot{q}_h , $h = 1 \dots n$.

Esiste una corrispondenza biunivoca tra $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ e $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ data dalla mappa

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \left(\varphi(\mathbf{q}), \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m. \quad (6.6)$$

FIBRATO TANGENTE A \mathcal{C}

Definiamo il **fibrato tangente** alla varietà \mathcal{C} come

$$T\mathcal{C} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}\}.$$

Proposizione 29. $T\mathcal{C}$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ di dimensione $2n$.

Dimostrazione. Se $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ allora i vettori \mathbf{v} tangenti a \mathcal{C} in \mathbf{x} soddisfano la relazione

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Consideriamo la mappa

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \ni (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto \left(\Psi(\mathbf{x}), \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{v} \right),$$

con matrice jacobiana

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{v})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} \right] & \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

Osservo che

$$\text{rank} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{v})}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 2k$$

per ogni $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in T\mathcal{C}$. □

Le coordinate $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ definite da (6.6) sono una scelta naturale per descrivere localmente il fibrato tangente $T\mathcal{C}$.

6.2 Vincoli olonomi

Consideriamo un sistema di N punti materiali vincolato. Assumiamo che

$$\mathcal{C}_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} : \Psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}\}$$

sia l'insieme delle configurazioni ammissibili al tempo t , dove

$$\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \Psi(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^k, \quad k \leq 3N$$

è una mappa di classe C^2 tale che

$$\text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}_t. \quad (6.7)$$

Per ogni valore di t , l'insieme delle configurazioni \mathcal{C}_t è una sottovarietà di \mathbb{R}^{3N} di dimensione $n = 3N - k$. Le varietà \mathcal{C}_t , $t \in \mathbb{R}$ sono tutte diffeomorfe tra loro, quindi hanno tutte la stessa dimensione n .

Per ogni t abbiamo un sistema di coordinate locali di classe C^2

$$\mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q}, t).$$

Definizione 17. Diciamo che il vincolo è *olonomo*¹ se ad ogni istante t l'insieme delle configurazioni del sistema è diffeomorfo ad una varietà differenziabile \mathcal{C}_t e l'insieme delle fasi (cioè le posizioni e velocità) è diffeomorfo al fibrato tangente $T\mathcal{C}_t$ di \mathcal{C}_t .

Possiamo avere dei vincoli olonomi anche quando l'equazione del vincolo sia della forma (6.1), ed il vincolo integrabile, a patto che l'equazione che si ottiene per le sole posizioni e tempo $\Psi(\mathbf{x}, t) = 0$ soddisfi la condizione (6.7).

Come esempio di vincolo integrabile consideriamo il seguente:

Esempio 8. Disco verticale di raggio R che rotola senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale.

Per definire la configurazione del disco ci basta l'ascissa s del suo baricentro lungo la guida e l'angolo θ che un raggio del disco forma con una direzione fissa, per esempio quella verticale. La condizione di rotolamento senza strisciamento si scrive

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0.$$

Integrando questa equazione si ottiene

$$(s - s_0) + R(\theta - \theta_0) = 0$$

in cui s_0, θ_0 sono i valori di s, θ ad un tempo t_0 . Si possono scegliere i valori di s_0, θ_0 in modo che valga $s_0 + R\theta_0 = 0$, quindi si ottiene un'equazione del vincolo della forma

$$\Psi(\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} = (s, \theta).$$

¹Questo termine è stato introdotto da Herz e deriva dal greco ὅλος (= tutto, intero) e νόμος (= legge) e si riferisce alla possibilità di scrivere una legge integrale (che coinvolga solo posizioni e tempo) per l'equazione dei vincoli.

6.3 Vincoli anolonomi

Se l'equazione del vincolo è della forma (6.1), ma non esiste una funzione Ψ che soddisfi le equazioni (6.3), allora il vincolo si dice anolonomo.

I sistemi anolonomi che consideriamo hanno tutti una varietà delle configurazioni, però non tutti i vettori tangenti a questa varietà sono accessibili.

Esempi classici di vincoli anolonomi sono:

1. un disco verticale che rotola senza strisciare su un piano orizzontale;
2. il pattino (o slitta) di Chaplygin su un piano;
3. una sfera che rotola senza strisciare su un piano;
4. una sfera che rotola senza strisciare all'interno di un cilindro verticale.

Nell'ambito dei sistemi con vincoli anolonomi si verificano dei fenomeni non intuitivi, come la presenza di equilibri asintoticamente stabili in sistemi conservativi.

6.4 Lo studio del moto vincolato

Le restrizioni sulle posizioni e velocità che si hanno nel moto vincolato sono causate dai vincoli stessi. Affinchè le relazioni (6.1) siano mantenute, si ammette che i vincoli esercitino delle forze sui punti del sistema, che si chiamano **reazioni vincolari**. Queste forze però sono di natura diversa dalle forze \mathbf{F}_j che agiscono sui punti di un sistema meccanico non vincolato, in quanto sono esse stesse da determinarsi, e non sono funzioni note dello stato cinetico del sistema.

Già nel semplice caso di un punto materiale vincolato ad una curva in \mathbb{R}^3 si incontrano delle difficoltà quando si cerca di determinare il moto. In particolare si trova che è necessario fare delle ipotesi sulle reazioni vincolari. Consideriamo una curva regolare $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizzata per lunghezza d'arco s . Allora, indicando con $'$ la derivata rispetto ad s ,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \gamma(s(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{s}(t)\gamma'(s(t)), \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{s}^2(t)\gamma''(s(t)) + \ddot{s}(t)\gamma'(s(t)).\end{aligned}$$

Consideriamo la base mobile di Frénet $\{\mathbf{e}_t(s), \mathbf{e}_n(s), \mathbf{e}_b(s)\}$ (rispettivamente il vettore tangente, normale e binormale), definita da

$$\mathbf{e}_t(s) = \gamma'(s), \quad \mathbf{e}_n(s) = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}, \quad \mathbf{e}_b(s) = \mathbf{e}_t(s) \times \mathbf{e}_n(s).$$

Poiché s è il parametro arco si ha

$$\mathbf{e}_t(s) \cdot \mathbf{e}_t(s) = 1, \quad \forall s; \tag{6.8}$$

inoltre, derivando la (6.8) rispetto ad s , si ottiene che

$$\mathbf{e}_t(s) \cdot \mathbf{e}_b(s) = 0.$$

La funzione $\kappa(s) = |\gamma''(s)|$ si chiama *curvatura* di γ . Con questa notazione si ha

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{s}^2 \kappa(s) \mathbf{e}_n(s) + \ddot{s} \mathbf{e}_t(s).$$

Supponiamo che il punto sia soggetto ad una forza $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ e alla reazione vincolare Φ . L'equazione di Newton si scrive

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \Phi(t).$$

Se proiettiamo l'equazione di Newton lungo la base di Frénet si ottiene

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_t(s, \dot{s}, t) + \Phi_t, \\ m\dot{s}^2 \kappa(s) &= F_n(s, \dot{s}, t) + \Phi_n, \\ 0 &= F_b(s, \dot{s}, t) + \Phi_b, \end{aligned} \quad (6.9)$$

dove $F_t, F_n, F_b, \Phi_t, \Phi_n, \Phi_b$ sono le componenti della forza \mathbf{F} e della reazione vincolare Φ lungo i vettori della base di Frénet.

Si vede allora che per determinare il moto $t \mapsto s(t)$ e la reazione vincolare Φ è necessario fare delle ipotesi. Un'ipotesi comune è di assumere che la reazione vincolare sia ortogonale alla curva: $\Phi_t = \Phi \cdot \mathbf{e}_t = 0$ (vincolo liscio). In questo caso la prima equazione in (6.9) diventa un'equazione pura (non contiene reazioni vincolari):

$$m\ddot{s} = F_t(s, \dot{s}, t).$$

Da questa si può determinare il moto $t \mapsto s(t)$. Sostituendo nelle altre equazioni in (6.9) si ottengono le componenti della reazione vincolare ortogonali al vincolo in funzione del tempo t :

$$\Phi_n = -F_n(s, \dot{s}, t) + m\dot{s}^2 \kappa(s), \quad \Phi_b = -F_b(s, \dot{s}, t).$$

La soluzione del problema si basa sulle ipotesi fatte per la reazione vincolare.

Esempio 9. Si fissi un riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$, con l'asse $O\hat{\mathbf{e}}_1$ verticale discendente. Consideriamo un pendolo, costituito da un punto materiale di massa m fissato ad un estremo di una sbarretta di lunghezza 2ℓ e massa trascurabile. Il sistema è soggetto alla forza di gravità, di accelerazione g . Dall'equazione di Newton si ha

$$m\mathbf{a} = mg\mathbf{e}_1 + \Phi\mathbf{e}_\rho, \quad (6.10)$$

in cui $\mathbf{e}_\rho = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$. Abbiamo assunto che la reazione vincolare sia ortogonale al vincolo (vincolo ideale). Proiettiamo l'equazione (6.10) lungo la direzione

radiale \mathbf{e}_ρ e lungo quella tangenziale $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2$. Si ottiene

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} - \frac{g}{\ell} \sin\theta &= 0, \\ \dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell} \cos\theta + \frac{\Phi}{m\ell} &= 0.\end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si può scrivere la reazione vincolare in funzione dello stato del sistema. Osserviamo che abbiamo potuto fare ciò grazie alle ipotesi fatte sulle reazioni vincolari.

Esercizio 9. Determinare il moto e la reazione vincolare per una particella di massa m vincolata a muoversi su una circonferenza di raggio R scabra, assumendo che valga la legge

$$\Phi_t = -\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \sqrt{\Phi_n^2 + \Phi_b^2}.$$

(Osserviamo che in questo caso il vincolo non è ideale.)

6.5 Realizzazione di vincoli

Le ipotesi ulteriori sulle reazioni vincolari, fatte in precedenza per studiare il moto dei sistemi vincolati, appaiono in contraddizione con il principio di determinismo meccanistico di Laplace, secondo il quale è sufficiente conoscere le condizioni iniziali per determinare il moto di un sistema meccanico.

Cerchiamo di descrivere i moti di un sistema vincolato come limite dei moti di una famiglia di sistemi conservativi.

.....

6.6 Vincoli ideali e principio di D'Alembert

Considero N punti materiali soggetti a vincoli olonomi fissi, con varietà delle configurazioni \mathcal{C} .

Definizione 18. Diciamo che il vincolo è ideale se le reazioni vincolari $\Phi = (\Phi_1 \dots \Phi_N)$ che può esercitare sugli N punti in una qualunque configurazione $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ soddisfano

$$\Phi \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}.$$

Date delle coordinate locali $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(q, t)$ sulla varietà \mathcal{C}_t si può scrivere un vettore velocità come segue

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}(\mathbf{q}, t)$$

6.7 Principio di d'Alembert

Sia $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$ la soluzione dell'equazioni di Newton

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \boldsymbol{\Phi}_j, \quad j = 1 \dots N$$

con condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$.

Siccome il vincolo è ideale possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^N [m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) - \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)] \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_N) \in T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{C}_t, \quad \forall t \quad (6.11)$$

Chiamiamo **principio di d'Alembert** la relazione (6.11).

I vettori

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_1}(\mathbf{q}(t), t), \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_n}(\mathbf{q}(t), t)$$

formano una base di \mathcal{C}_t , quindi il principio di d'Alembert si può formulare così:

$$\sum_{j=1}^N [m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) - \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)] \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) = 0, \quad \forall h = 1 \dots n, \forall t. \quad (6.12)$$

Osservazione 18. *Le equazioni (6.12) sono equazioni pure, cioè non vi appaiono le reazioni vincolari.*

Definizione 19. *Chiameremo equazione simbolica della Dinamica la relazione (6.12).*

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Caratterizzazione degli equilibri nella Statica: \mathbf{x}_0 è una posizione di equilibrio per un sistema di N punti materiali soggetti a forze \mathbf{F}_j , $j = 1 \dots N$, se

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}, t) \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_N) \in T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}.$$

Con il principio di D'Alembert, basato su quello dei lavori virtuali, i problemi di dinamica vengono ridotti a problemi di statica.

6.8 Idealità del vincolo di rigidità

Se denotiamo con Φ_h e \mathbf{v}_h le possibili reazioni vincolari e le possibili velocità dei punti P_h , si ha

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n \Phi_h \cdot \mathbf{v}_h &= \sum_{h=1}^n \Phi_h \cdot [\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_{O'})] = \\ &= \left(\sum_{h=1}^n \Phi_h \right) \cdot \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{h=1}^n (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_{O'}) \times \Phi_h \right) = 0. \end{aligned}$$

Infatti le Φ_h sono forze interne di tipo classico, per cui

$$\Phi_h = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^n \Phi_{hk}$$

con

$$\Phi_{hk} + \Phi_{kh} = \mathbf{0}, \quad \Phi_{hk} \times \mathbf{r}_{hk} = \mathbf{0}.$$