Parte I

Meccanica newtoniana

Capitolo 1

Sistemi meccanici discreti non vincolati

Vogliamo descrivere il moto di un sistema di punti materiali $P_1 \dots P_N$ dotati di masse $m_1 \dots m_N$, soggetti a forze esterne assegnate, che si possono muovere liberamente nello spazio ambiente.

1.1 Spazio, tempo e sistemi di riferimento

Spazio e tempo

Il tempo t è reale e unidimensionale; lo spazio ambiente è euclideo tridimensionale e lo denotiamo con $\mathbb{E}^3$.

$\mathbb{E}^3$ è dunque uno spazio affine reale a cui è associato uno spazio vettoriale $\mathbb{V}^3$ dotato di un prodotto scalare, che denotiamo con $\cdot$, cioè di una forma bilineare simmetrica definita positiva $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{R}$. Possiamo quindi introdurre la norma

$$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}}}, \qquad \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$$

e la distanza

$$d(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = |\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}|, \qquad \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}^3.$$

Introduciamo anche lo spazio prodotto $\mathbb{G} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$, che chiamiamo spazio-tempo di Galileo. Gli elementi di $\mathbb{G}$ si chiamano eventi. Inoltre $\mathbb{G}$ ha la struttura di un fibrato banale, avente per base la retta del tempo $\mathbb{R}$, mentre le fibre sono gli spazi degli eventi simultanei $\mathbb{E}^3 \times \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$, tutti isomorfi a $\mathbb{E}^3$. La struttura euclidea su $\mathbb{E}^3$ permette di misurare le distanze tra eventi simultanei usando questo isomorfismo.

Prodotto vettoriale

Introduciamo un prodotto vettoriale (o prodotto vettore) su $\mathbb{V}^3$, denotato con $\times$, che è un'applicazione $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ bilineare, antisimmetrica, tale che

i) se $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$ allora $|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}| = |\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}|$,
ii) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$,

per ogni $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{V}^3$.

Dimostriamo che sullo spazio $\mathbb{V}^3$, dotato del prodotto scalare $\cdot$, esistono 2 prodotti vettoriali $\times_1, \times_2$, il cui risultato differisce solo per il segno e, scelta una base ortonormale $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, risulta

$$\begin{array}{lll} \hat{\mathbf{e}}_1 \times_1 \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3, & \hat{\mathbf{e}}_2 \times_1 \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, & \hat{\mathbf{e}}_3 \times_1 \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2, \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \times_2 \hat{\mathbf{e}}_2 = -\hat{\mathbf{e}}_3, & \hat{\mathbf{e}}_2 \times_2 \hat{\mathbf{e}}_3 = -\hat{\mathbf{e}}_1, & \hat{\mathbf{e}}_3 \times_2 \hat{\mathbf{e}}_1 = -\hat{\mathbf{e}}_2. \end{array} \tag{1.1}$$

Osserviamo innanzitutto che le due applicazioni bilineari e antisimmetriche $\times_1, \times_2$ definite dalle (1.1) soddisfano le proprietà i), ii).

Esercizio 1. *Verificare l'affermazione precedente.*

Consideriamo adesso un'applicazione $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ bilineare e antisimmetrica con le proprietà i), ii) del prodotto vettore elencate sopra. Allora, data una base ortornormale $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ di $\mathbb{V}^3$, dalla proprietà antisimmetrica abbiamo

$$\hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{e}}_j = \vec{\mathbf{0}}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Dalle i), ii) segue che $|\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2| = 1$ e che $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$ sta in $\hat{\mathbf{e}}_1^\perp \cap \hat{\mathbf{e}}_2^\perp = \mathrm{span}(\hat{\mathbf{e}}_3)$, quindi

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \pm\hat{\mathbf{e}}_3.$$

Inoltre, se $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = +\hat{\mathbf{e}}_3$, si ha anche

$$\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, \qquad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2. \tag{1.2}$$

Infatti, ragionando come prima si ottiene $\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \pm\hat{\mathbf{e}}_1$ e, se valesse $\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = -\hat{\mathbf{e}}_1$, usando ii) avremmo la seguente contraddizione:

$$-1 = \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = 1.$$

La seconda equazione in (1.2) si dimostra in modo simile. Procedendo in modo analogo si ottiene che se invece vale $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = -\hat{\mathbf{e}}_3$ si ha

$$\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = -\hat{\mathbf{e}}_1, \qquad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = -\hat{\mathbf{e}}_2.$$

Scelto uno dei due prodotti vettoriali su $\mathbb{V}^3$, che indichiamo con $\times$, diciamo che una base ortonormale ordinata $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ è levogira rispetto a $\times$ (o forma una terna levogira) se vale

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3, \qquad \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, \qquad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2.$$

Nel seguito considereremo solo terne levogire.

Vale la seguente proprietà (formula del prodotto triplo):

$$(\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}) \times \vec{\mathbf{z}} = (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{z}})\, \vec{\mathbf{y}} - (\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{z}})\, \vec{\mathbf{x}}\,. \tag{1.3}$$

Esercizio 2. *Verificare la (1.3).*

Notiamo che il prodotto vettoriale non è associativo, infatti dalla formula del prodotto triplo e dalla proprietà antisimmetrica otteniamo

$$(\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}) \times \vec{\mathbf{z}} - \vec{\mathbf{x}} \times (\vec{\mathbf{y}} \times \vec{\mathbf{z}}) = (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}})\, \vec{\mathbf{z}} - (\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{z}})\, \vec{\mathbf{x}}$$

che in generale è non nullo.

Introduciamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{h=1}^{3} x_h y_h, \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

La mappa

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{e}_3,$$

con $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T$, definisce un prodotto vettore su $\mathbb{R}^3$ e la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ forma una terna levogira.

Sistemi di riferimento

La descrizione del moto di un corpo richiede l'introduzione di un sistema di riferimento, che permetta di individuare la posizione del corpo nello spazio ambiente in cui avviene il moto.

Un sistema di riferimento in $\mathbb{E}^3$ è una mappa differenziabile[1]

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \Sigma(t) = \{O(t), \hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t)\} \in \mathbb{E}^3 \times (\mathbb{V}^3)^3,$$

con $O \in \mathbb{E}^3, \hat{\mathbf{e}}_j \in \mathbb{V}^3, j = 1,2,3$, tale che

$$\hat{\mathbf{e}}_i(t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j(t) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j,\ \forall t.$$

[1]una mappa $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}^3$ o $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{V}^3$ è differenziabile se lo è una sua qualunque rappresentazione in coordinate $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$.

Inoltre assumiamo che i vettori $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ formino una terna levogira. Per un sistema di riferimento Σ useremo anche la notazione $O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, oppure $Oxyz$.

Rappresentazione in coordinate

Dato $P \in \mathbb{E}^3$ ed un sistema di riferimento $O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, possiamo associare in modo unico a tale punto un vettore di coordinate in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{E}^3 \ni P \longleftrightarrow \vec{\mathbf{x}}_P = (P - O) = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{\mathbf{e}}_i \in \mathbb{V}^3 \longleftrightarrow \mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \tag{1.4}$$

Denoteremo con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, corrispondenti a $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. In seguito, nella scrittura delle formule, utilizzeremo sia la notazione in $\mathbb{V}^3$ che quella in coordinate in $\mathbb{R}^3$.

Fissato un sistema di riferimento in $\mathbb{E}^3$ possiamo identificare $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$ con lo spazio delle coordinate di Galileo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

1.2 Descrizione del moto

Il moto di un punto $P \in \mathbb{E}^3$ è una mappa differenziabile

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto P(t) \in \mathbb{E}^3.$$

Dato un sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, possiamo definire la posizione, la velocità e l'accelerazione di P relativamente a Σ rispettivamente come

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}_P = (P - O) &= \sum_{i=1}^{3} x_i\,\hat{\mathbf{e}}_i, \\
\vec{\mathbf{v}}_P = \frac{d}{dt}(P - O)\Big|_\Sigma &= \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i\,\hat{\mathbf{e}}_i, \\
\vec{\mathbf{a}}_P = \frac{d^2}{dt^2}(P - O)\Big|_\Sigma &= \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i\,\hat{\mathbf{e}}_i
\end{aligned}$$

e possiamo identificarle tramite la (1.4) con i rispettivi vettori delle loro coordinate in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_P = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad \mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{x}}_P = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) \in \mathbb{R}^3.$$

L'operazione di derivata temporale di una mappa vettoriale dipende dalla base in cui si scrivono le componenti e quindi, per i sistemi meccanici, dalla scelta del riferimento. Utilizzeremo la notazione $\frac{d}{dt}(\cdot)\big|_\Sigma$ per indicare esplicitamente tale dipendenza.

1.3 Le equazioni del moto

Dato un sistema di N punti materiali e fissato un riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ assumiamo che la forza agente sul punto P_i sia esprimibile da una mappa[2]

$$\vec{\mathbf{F}}_i : (\mathbb{V}^3)^N \times (\mathbb{V}^3)^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{V}^3$$

che dipende solo dalla posizione e dalla velocità dei punti del sistema e dal tempo t, quindi

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N, \vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N, t).$$

Vale il principio di sovrapposizione, cioè i contributi di due forze agenti su uno stesso punto si sommano vettorialmente.

Osserviamo che le forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ dipendono dal sistema di riferimento scelto, vedi Sezione 2.

Il determinismo di Laplace e le equazioni di Newton

Il principio del determinismo meccanicistico dice che la conoscenza dello stato cinetico (posizioni e velocità) di un sistema di N punti materiali ad un certo istante permette di determinare tutta la sua evoluzione temporale.

Dato un sistema formato dai punti $P_i, i = 1 \dots N$, soggetti alle forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ nel sistema di riferimento Σ, assumiamo che valgano le equazioni di Newton (*secondo principio della Dinamica*). Più precisamente, siano

$$\vec{\mathbf{x}} = (\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N)\,, \qquad \vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N)\,, \in (\mathbb{V}^3)^N$$

i vettori delle posizioni e velocità degli N punti. Se

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{v}}, t)$$

è la forza agente sul punto P_i, $i = 1 \dots N$, allora si assume che il moto $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ sia soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{\mathbf{x}}_i\Big|_\Sigma = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{v}}, t) \qquad i = 1, \dots, N, \tag{1.5}$$

oppure, in coordinate in $\mathbb{R}^3$,

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \qquad i = 1, \dots, N. \tag{1.6}$$

[2]questa si può anche considerare come mappa $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{V}^3$, oppure come mappa $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ utilizzando l'isomorfismo $\mathbb{V}^3 \leftrightarrow \mathbb{R}^3$.

1.4 I riferimenti inerziali

TRASFORMAZIONI GALILEIANE

Fissato un sistema di riferimento, chiamiamo gruppo di Galileo il gruppo $\mathcal{G}$ delle trasformazioni affini dello spazio delle coordinate di Galileo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ che conservano gli intervalli di tempo (con la loro orientazione) e la distanza tra eventi simultanei.

Proposizione 1. *Ogni elemento $g \in \mathcal{G}$ si scrive in modo unico come prodotto di trasformazioni del tipo seguente:*

i) $g_1(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + t\mathbf{u}, t)$ *(moto uniforme con velocità* $\mathbf{u}$*)*
ii) $g_2(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s)$ *(traslazione dell'origine)*
iii) $g_3(\mathbf{x}, t) = (G\mathbf{x}, t)$ *(isometria spaziale)*

con $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, t, s \in \mathbb{R}, G \in O(3)$.

Dimostrazione. Consideriamo una generica trasformazione affine $\mathbf{\Phi}$ di $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ in sé:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} \overset{\mathbf{\Phi}}{\mapsto} A \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} + \mathbf{B},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} G & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ s \end{pmatrix}, \quad G \in \mathcal{M}(3,3), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad a, s \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo che se $\mathbf{\Phi}$ è una trasformazione del gruppo $\mathcal{G}$ si ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $a = 1$, $G \in O(3)$. Da questo seguirà la tesi. L'invarianza degli intervalli di tempo ci dice che

$$|\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + a(t_1 - t_2)| = |t_1 - t_2|$$

per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Da questo segue che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $|a| = 1$. Per conservare anche il verso del tempo si deve scegliere $a = 1$. L'invarianza della distanza tra eventi simultanei $(\mathbf{x}_1, t)$, $(\mathbf{x}_2, t)$ ci dà

$$|G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, da cui segue che $G \in O(3)$.

□

$\mathcal{G}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio delle trasformazioni affini di $\mathbb{A}^4$ di dimensione 10. Siccome vogliamo conservare anche l'orientazione dello spazio, data dalla scelta del sistema di riferimento, ci restringeremo alle trasformazioni con $G \in SO(3)$.

PRINCIPIO DI RELATIVITÀ DI GALILEO

Fissiamo un sistema di riferimento. Dato un sistema di N punti materiali possiamo estendere in modo naturale l'azione del gruppo di Galileo allo spazio degli stati $(\mathbb{R}^3)^N \times (\mathbb{R}^3)^N \times \mathbb{R}$ definendo l'azione dei generatori g_1, g_2, g_3 nel modo seguente:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (\mathbf{x} + t\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}, t) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, t + s) \\ g_3(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (G\mathbf{x}_1, \dots, G\mathbf{x}_N, G\mathbf{v}_1, \dots, G\mathbf{v}_N, t) \end{aligned}$$

con $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in (\mathbb{R}^3)^N, \boldsymbol{\xi} = (\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}), \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}), \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, t, s \in \mathbb{R}, G \in SO(3)$.

Definizione 1. *Diciamo che un sistema di riferimento è inerziale se le equazioni di Newton (1.6) in questo riferimento sono invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo di Galileo $\mathcal{G}$.*[3]

L'invarianza delle equazioni di Newton significa che, data una qualunque soluzione $t \to \mathbf{x}(t)$ di queste equazioni, ogni elemento $g \in \mathcal{G}$ la trasforma in un'altra soluzione.

Il principio di relatività di Galileo afferma che esistono dei riferimenti inerziali.

In un riferimento inerziale la proprietà di invarianza rispetto al gruppo di Galileo impone dei vincoli sulla forma delle forze:

a) invarianza per traslazioni del tempo: se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione di (1.6) anche $\mathbf{x}(t+s)$ lo è, cioè
$$\ddot{\mathbf{x}}(t+s) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t+s), \dot{\mathbf{x}}(t+s), t), \qquad s, t \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$
Ne segue che le forze $\mathbf{F}_i$ non dipendono da t:
$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}),$$
cioè *le leggi della natura restano le stesse al passare del tempo.* Infatti, scegliendo t_1, s_1 con $t_1 + s_1 = t + s =: \tau$, dalla (1.7) si ottiene
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), \tau - s) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), \tau - s_1),$$
per cui $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = 0$.

b) invarianza per traslazioni uniformi nello spazio $\mathbb{E}^3$: se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione anche $\mathbf{x}(t) + t\mathbf{v} + \mathbf{y}$ lo è (lo spazio è omogeneo). Ne segue che
$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k)$$
cioè le forze dipendono solo dalle distanze e dalle velocità relative.

[3] in realtà noi considereremo solo le trasformazioni in cui $G \in SO(3)$ perché vogliamo che preservino l'orientazione di $\mathbb{E}^3$

c) invarianza per rotazioni nello spazio $\mathbb{E}^3$: se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione anche $(G\mathbf{x}_1(t), \ldots, G\mathbf{x}_N(t))$ lo è, per ogni $G \in SO(3)$ (lo spazio è isotropo), e si ha la relazione

$$\mathbf{F}_i(G\mathbf{x}_1, \ldots, G\mathbf{x}_N, G\mathbf{v}_1, \ldots, G\mathbf{v}_N) = G\mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

In particolare, se il sistema consiste di un solo punto, il suo moto in ogni sistema di riferimento inerziale è rettilineo uniforme, infatti per a), b) la forza non dipende da $t, \mathbf{x}, \mathbf{v}$, quindi è costante; per c) essa è invariante per rotazioni, quindi è nulla. Questo ci dà il primo principio della Dinamica, detto anche principio di inerzia, che era già noto a Galileo.

1.5 Sistemi meccanici

Definizione 2. *Consideriamo un insieme di N punti materiali, $P_i, i = 1 \ldots N$, di masse m_i, su cui agiscono delle forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ assegnate a priori in un sistema di riferimento Σ. Diciamo che questo è un sistema meccanico classico (discreto, non vincolato) se il moto dei punti soddisfa le equazioni di Newton (1.6). Se vale anche il principio di relatività di Galileo parleremo di sistema meccanico galileiano.*

Facciamo alcune osservazioni:

1. il fatto che valga il principio di relatività implica che il moto del sistema può essere studiato in un riferimento inerziale;
2. per introdurre un sistema meccanico dobbiamo specificare un sistema di riferimento, in quanto le forze in gioco dipendono da esso.

Nei sistemi che considereremo il principio di relatività può essere violato. L'esempio più semplice è quello della caduta di un grave, cioè, fissato un riferimento $O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, il moto di un punto materiale di massa m soggetto alla forze di gravità $-mg\hat{\mathbf{e}}_3$. È evidente la mancanza di invarianza per rotazione dell'equazione del moto: la direzione della gravità è privilegiata. Questo si spiega perché il principio di relatività vale per sistemi isolati. In questo semplice modello matematico stiamo considerando il punto materiale in un campo di forze esterno (quello della gravità), quindi non è un sistema isolato. Potremmo anche usare un modello diverso, più complesso, includendo la Terra nel sistema, ma ai fini di fare predizioni per questo problema spesso conviene impostare il problema nel modo più semplice.

Parleremo quindi di sistemi meccanici distinguendo tra forze interne e forze esterne (vedi Sezione 3.2), essendo le prime prodotte dall'interazione tra i punti del sistema.

1.6 Dinamica di un punto materiale P

Consideriamo un punto materiale P di massa m su cui agisce una forza $\vec{\mathbf{F}}$ nel sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$. Siano $\vec{\mathbf{x}}_P, \vec{\mathbf{v}}_P, \vec{\mathbf{a}}_P$ la posizione, la velocità e l'accelerazione di P relative a Σ. Denoteremo le coordinate in $\mathbb{R}^3$ delle rispettive quantità con gli stessi simboli ma senza il simbolo di vettore '$\rightarrow$'.

Nella descrizione del moto di P saranno utili le seguenti quantità:

Quantità di moto (o momento lineare)

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}_P$$

Momento Angolare rispetto a un polo $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = (P - Q) \times m\vec{\mathbf{v}}_P$$

Energia cinetica[4]

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{\mathbf{v}}_P|^2$$

Momento della forza $\mathbf{F}$ rispetto a un polo $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{\mathbf{N}}_Q = (P - Q) \times \vec{\mathbf{F}}$$

Potenza della forza $\vec{\mathbf{F}}$

$$\Pi = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_P$$

Lavoro elementare all'instante t della forza $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}_P, \vec{\mathbf{v}}_P, t)$

$$\delta\mathcal{L} = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}_P$$

Consideriamo il caso di una forza posizionale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$. Per essa il lavoro elementare è una 1–forma differenziale su $\mathbb{R}^3$. Se tale forma è esatta ed $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è il suo potenziale possiamo definire la seguente quantità:

Energia potenziale

$$V = -U.$$

Un campo di forze posizionale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$ che ammette un potenziale si dice conservativo. In tal caso, se $V(\mathbf{x}_P)$ è l'energia potenziale del campo di forze, si ha

$$\delta\mathcal{L} = -dV, \qquad \mathbf{F} = -\nabla V$$

[4]la quantità $m|\vec{\mathbf{v}}_P|^2$ è stata introdotta da Leibniz con il nome di *vis viva*.

e si definisce la sua
Energia totale

$$E = T + V.$$

Esempi di forze conservative:

1) $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -mg\mathbf{e}_3, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (forza peso)

$$V(\mathbf{x}) = mg\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3, \qquad \nabla V(\mathbf{x}) = mg\mathbf{e}_3 = -\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

2) $\mathbf{F} = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \;\; \rho = |\mathbf{x}|, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (forza centrale a simmetria sferica)

$$V(\mathbf{x}) = -\int f(\rho)\, d\rho, \qquad \nabla V(\mathbf{x}) = -f(\rho)\nabla\rho = -f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

1.7 Equazioni di bilancio e leggi di conservazione

Consideriamo un punto materiale P di massa m con coordinate $\mathbf{x}_P$, su cui agisca una forza $\mathbf{F}$.

Proposizione 2. *Sia $t \to \mathbf{x}_P(t)$ una soluzione dell'equazione di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P$. Allora valgono le relazioni*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \tag{1.8}$$

e, per ogni punto $Q \in \mathbb{E}^3$,

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - m\mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}_P. \tag{1.9}$$

Dimostrazione. Basta calcolare la derivata totale di $\mathbf{p}$ e di $\mathbf{M}_Q$, cioè la derivata temporale lungo una qualunque soluzione di $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P$.

□

Proposizione 3. *(teorema dell'energia cinetica) Sia $t \to \mathbf{x}_P(t)$ una soluzione dell'equazione di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P$. Allora*

$$\dot{T} = \Pi.$$

Dimostrazione.

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_P = m\mathbf{a}_P \cdot \mathbf{v}_P = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P) = \dot{T}.$$

□

Proposizione 4. *Valgono le seguenti leggi di conservazione*

1) *se la componente di* $\mathbf{F}$ *nella direzione* $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ *è nulla allora* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}$ *si conserva durante il moto;*
2) *se il momento della forza* $\mathbf{F}$ *rispetto ad un polo* Q *in quiete (nel riferimento in cui si studia il moto) ha componente nulla nella direzione* $\mathbf{e}$ *allora* $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}$ *si conserva durante il moto.*

Dimostrazione. Basta moltiplicare scalarmente per $\mathbf{e}$ le relazioni (1.8), (1.9).

□

Ad esempio, per un punto materiale soggetto alla forza peso $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_3$ si conservano $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}_3$ rispetto ad ogni polo fisso Q.

La quantità $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}$ si chiama anche momento assiale relativo alla retta $Q\mathbf{e} = \{Q + \lambda\vec{\mathbf{e}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ (passante per Q e avente la direzione di $\mathbf{e}$) e non cambia scegliendo come polo un punto qualunque su tale retta.

Proposizione 5. *(conservazione dell'energia) Se il campo di forze* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$ *è conservativo, con energia potenziale* $V(\mathbf{x}_P)$*, allora l'energia totale* $E = T + V$ *è un integrale primo.*

Dimostrazione.

$$\dot{T}(\mathbf{x}_P, \mathbf{v}_P) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{v}_P = -\nabla V(\mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{v}_P = -\dot{V}(\mathbf{x}_P) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(T + V) = 0.$$

□