Capitolo 2

Sistemi di riferimento in moto relativo

Consideriamo due sistemi di riferimento

$$\Sigma = O\, \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \qquad \Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$$

nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$. Le terne di vettori $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ e $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ dei sistemi di riferimento formano due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dello spazio vettoriale $\mathbb{V}^3$ associato ad $\mathbb{E}^3$. Pertanto, dato un vettore $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$ esistono uniche le rappresentazioni in tali basi

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^{3} u_h\, \hat{\mathbf{e}}_h, \qquad \vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^{3} u'_h\, \hat{\mathbf{e}}'_h.$$

Abbiamo già osservato che le derivate temporali delle mappe vettoriali, come la velocità di un punto materiale, dipendono dal sistema di riferimento scelto. Definiamo le derivate temporali di $\vec{\mathbf{u}}$ nei sistemi di riferimento Σ e Σ' come

$$\left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^{3} \dot{u}_h\, \hat{\mathbf{e}}_h, \qquad \left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} = \sum_{h=1}^{3} \dot{u}'_h\, \hat{\mathbf{e}}'_h.$$

Velocità angolare e formule di Poisson

Dati due sistemi di riferimento $\Sigma = O\, \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3, \Sigma' = O' \hat{\mathbf{e}}'_1 \hat{\mathbf{e}}'_2 \hat{\mathbf{e}}'_3$, ad ogni istante t esiste un'unica mappa vettoriale $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \in \mathbb{V}^3$ detta velocità angolare di Σ' rispetto a Σ, tale che

$$\left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt}\right|_{\Sigma} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}'_h, \qquad h = 1, 2, 3. \tag{2.1}$$

Le relazioni (2.1) si chiamano formule di Poisson.

Dimostrazione. Considero la matrice $R \in SO(3)$ di cambiamento di base da $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ a $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$, con componenti $R_{ji} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j,\ i,j = 1,2,3$. Il vettore

$$\left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt}\right|_\Sigma$$

è rappresentato da $\dot{\mathbf{e}}'_h \in \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}$. Dalle relazioni $\mathbf{e}'_h = R\mathbf{e}_h,\ R^TR = I$ si ottiene

$$\dot{\mathbf{e}}'_h = \dot{R}R^TR\mathbf{e}_h = \dot{R}R^T\mathbf{e}'_h = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}'_h$$

per $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^3$, infatti $\dot{R}R^T$ è antisimmetrica, come si vede derivando $RR^T = I$ rispetto a t. Data una matrice antisimmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

possiamo associare a questa il vettore $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbb{R}^3$ attraverso l'equazione

$$A\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{h=1}^3 \Omega_h \hat{\mathbf{e}}_h \in \mathbb{V}^3$, rappresentato da $\mathbf{\Omega}$ in $\mathcal{B}$, è la velocità angolare. Infatti se $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ rappresentano $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ in $\mathcal{B}$, allora $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ è rappresentato da $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} &\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{\mathbf{e}}_i \times \sum_{j=1}^3 b_j \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \\ &\sum_{1 \le i < j \le 3} (a_i b_j - a_j b_i) \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{h=1}^3 (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_h \hat{\mathbf{e}}_h. \end{aligned} \tag{2.2}$$

L'unicità si dimostra per assurdo. Se esistessero $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1, \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$ che soddisfano le (2.1), allora $(\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 - \vec{\boldsymbol{\omega}}_2) \times \hat{\mathbf{e}}'_h = \vec{\mathbf{0}}, h = 1,2,3$. Quindi $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 = \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$.

□

Una formula esplicita per la velocità angolare è data da

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_h \times \left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt}\right|_\Sigma \tag{2.3}$$

infatti, usando le formule di Poisson,

$$\sum_{h=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_h \times \left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt}\right|_\Sigma = \sum_{h=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_h \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}'_h) = \sum_{h=1}^3 [\vec{\boldsymbol{\omega}} - (\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\mathbf{e}}'_h)\hat{\mathbf{e}}'_h] = 2\vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Esempio 1. *Siano $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, $\Sigma' = O\hat{\mathbf{e}}_1'\hat{\mathbf{e}}_2'\hat{\mathbf{e}}_3'$ due sistemi di riferimento con lo stesso origine O. Assumiamo che Σ' ruoti attorno all'asse $O\hat{\mathbf{e}}_3$ di Σ in modo che i vettori $\hat{\mathbf{e}}_1'$ e $\hat{\mathbf{e}}_1$ formino un angolo $\theta(t)$. Calcoliamo la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ.*

Abbiamo che

$$\hat{\mathbf{e}}_1' = \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_2' = -\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_3' = \hat{\mathbf{e}}_3. \tag{2.4}$$

Derivando le (2.4) rispetto a t ed applicando (2.3) si ottiene che

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_3$$

Velocità e accelerazione relative a riferimenti diversi

Data una mappa vettoriale differenziabile $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{V}^3$, vale la relazione

$$\left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{u}} \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Osservo innanzitutto che

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_i u_i'\hat{\mathbf{e}}_i' = \sum_i u_i' \sum_j R_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j = \sum_j \Big(\sum_i u_i' R_{ji}\Big)\hat{\mathbf{e}}_j.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma} &= \sum_j \frac{d}{dt}\Big(\sum_i u_i' R_{ji}\Big)\hat{\mathbf{e}}_j = \sum_j\sum_i \Big(\dot{u}_i' R_{ji} + u_i'\dot{R}_{ji}\Big)\hat{\mathbf{e}}_j = \\
&= \sum_i \dot{u}_i'\Big(\sum_j R_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j\Big) + \sum_i u_i' \sum_j \dot{R}_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j = \left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \sum_i u_i' \left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}_i'}{dt}\right|_{\Sigma} = \\
&= \left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \sum_i u_i'\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}_i' = \left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{u}}.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 1. *Dalla (2.5) segue che la derivata temporale di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ in Σ ed in Σ' coincidono.*

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ rappresentano le coordinate del vettore $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$ nelle basi $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}_1', \hat{\mathbf{e}}_2', \hat{\mathbf{e}}_3'\}$ rispettivamente, possiamo scrivere

$$\dot{\mathbf{u}} = R\dot{\mathbf{u}}' + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{u}'$$

dove $R \in SO(3)$, $R\mathbf{e}_h = \mathbf{e}'_h$.

Composizione di velocità angolari

Considero tre sistemi di riferimento in $\mathbb{E}^3$:

$$\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3\,; \qquad \Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3\,; \qquad \Sigma'' = O''\hat{\mathbf{e}}''_1\hat{\mathbf{e}}''_2\hat{\mathbf{e}}''_3\,.$$

Se $\vec{\boldsymbol{\omega}}'$ è la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ e se $\vec{\boldsymbol{\omega}}''$ è la velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ', allora la velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ di Σ'' rispetto a Σ è data dalla somma $\vec{\boldsymbol{\omega}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}}''$.

Dimostrazione. Usando la (2.5) e le formule di Poisson si ha, per $h = 1, 2, 3$,

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}''_h = \left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}''_h}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}''_h}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}}' \times \hat{\mathbf{e}}''_h = (\vec{\boldsymbol{\omega}}'' + \vec{\boldsymbol{\omega}}') \times \hat{\mathbf{e}}''_h.$$

Si conclude usando l'unicità della velocità angolare.

□

Possiamo allora scrivere due formule, che legano la velocità $\vec{\mathbf{v}}$ e l'accelerazione $\vec{\mathbf{a}}$ di un punto materiale P in un sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ a quelle calcolate relativamente ad un altro riferimento $\Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$, in moto con velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ rispetto a Σ, denotate con $\vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{a}}'$ rispettivamente.

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{v}}^T, \qquad \vec{\mathbf{v}}^T = \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O') \tag{2.6}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}' + \vec{\mathbf{a}}^T + \vec{\mathbf{a}}^C, \quad \vec{\mathbf{a}}^T = \vec{\mathbf{a}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')) + \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times (P - O'), \quad \vec{\mathbf{a}}^C = 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}' \tag{2.7}$$

Per ricavare le formule precedenti scriviamo

$$P - O = (P - O') + (O' - O).$$

Derivando rispetto a t in Σ e usando (2.5) si ha

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \left.\frac{d(P - O')}{dt}\right|_{\Sigma} = \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \left.\frac{d(P - O')}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')$$

da cui segue (2.6). Derivando ancora si ottiene[1]

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{O'} + \left.\frac{d^2(P - O')}{dt^2}\right|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}' + \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times (P - O') + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')) + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}',$$

da cui segue (2.7).

[1] usiamo la relazione $\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})\big|_{\Sigma} = \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{u}}\big|_{\Sigma} \times \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \times \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{v}}\big|_{\Sigma}$, che segue dalla (2.2).

I termini $\vec{\mathbf{a}}^T$ e $\vec{\mathbf{a}}^C$ si chiamano rispettivamente accelerazione di trascinamento e accelerazione di Coriolis. Il termine $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O'))$ si chiama accelerazione centripeta. In coordinate nella base $\mathcal{B}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= R\mathbf{x}' + \mathbf{x}_{O'}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= R\dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}', \\ \ddot{\mathbf{x}} &= R\ddot{\mathbf{x}}' + \ddot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\mathbf{x}' + 2\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{x}}' \end{aligned}$$

in cui $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', x_3')$ è il vettore delle coordinate di $(P - O')$ in $\mathcal{B}'$.

2.1 Equazione del moto in riferimenti diversi

Se l'equazione del moto di un punto materiale P di massa m in un riferimento $O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ si scrive

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}(P - O, \vec{\mathbf{v}}, t)$$

allora, nel riferimento $O'\hat{\mathbf{e}}_1'\hat{\mathbf{e}}_2'\hat{\mathbf{e}}_3'$ possiamo scrivere

$$m\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}}((P - O') + (O' - O), \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{v}}^T, t) - m\vec{\mathbf{a}}^T - m\vec{\mathbf{a}}^C.$$

In coordinate nella base $\mathcal{B}$ l'ultima equazione diventa

$$mR\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}(R\mathbf{x}'+\mathbf{x}_{O'}, R\dot{\mathbf{x}}'+\dot{\mathbf{x}}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{x}') - m(\ddot{\mathbf{x}}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{x}')+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times R\mathbf{x}') - 2m\boldsymbol{\omega}\times R\dot{\mathbf{x}}'.$$

2.2 Deviazione dei gravi in caduta libera

Considero il moto di un punto materiale P studiato in un sistema di riferimento solidale alla Terra, assumendo che questa abbia forma sferica e che ruoti attorno ad una direzione fissa con velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ costante. Dato un sistema di riferimento $\Sigma' = O'xyz$ solidale alla Terra l'accelerazione relativa è data da

$$\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}}^T - \vec{\mathbf{a}}^C$$

dove

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}, \qquad \vec{\mathbf{a}}^T = \vec{\mathbf{a}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')), \qquad \vec{\mathbf{a}}^C = 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}'.$$

Inoltre $\vec{\mathbf{a}}_{O'} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (O' - C))$, dove C è il centro della Terra. Siccome $P - O'$ è molto più piccolo di $O' - C$ posso trascurare il termine $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O'))$ quindi

$$\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{g}} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (O' - C)) - 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}'.$$

Poniamo

$$\vec{\mathbf{g}}_{O'} = \vec{\mathbf{g}} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (O' - C))\,;$$

questo mi dà la gravità locale. Possiamo orientare Σ' nel modo seguente: scelgo l'asse $O'z$ lungo la direzione della gravità locale, l'asse $O'x$ parallelo al piano del meridiano, verso l'equatore, e l'asse $O'y$ in modo tale che $O'xyz$ sia levogira.

Approssimiamo la gravità locale con $\vec{\mathbf{g}}$. Indicando con λ la latitudine di O' e passando in in coordinate ottengo il sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x} = 2\omega \sin\lambda \dot{y}, \quad \ddot{y} = -2\omega \sin\lambda \dot{x} - 2\omega \cos\lambda \dot{z}, \quad \ddot{z} = -g + 2\omega \cos\lambda \dot{y} \tag{2.8}$$

e scelgo le condizioni iniziali

$$x(0) = y(0) = z(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0.$$

La soluzione di questo sistema di equazioni differenziali lineari si può scrivere esplicitamente, comunque otterremo un risultato qualitativo facendo un approssimazione. Integrando la prima e la terza equazione in (2.8) e sostituendo nella seconda si ottiene

$$\ddot{y} = -4\omega^2 y + 2g\omega t \cos\lambda.$$

Trascurando il termine con ω^2 e integrando si ottiene

$$y(t) = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\lambda.$$

Questa formula ci dà la deviazione verso Est del grave in caduta libera.