Capitolo 4

Moti centrali

Definizione 8. *Si dice che* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ *è un* **campo di forze centrale** *con centro* O*, se vale la relazione*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\,\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ \rho = |\mathbf{x}|. \tag{4.1}$$

Vale la seguente

Proposizione 14. *Un campo di forze* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^3$ *è centrale se e solo se*

$$\mathbf{F}(R\,\mathbf{x}) = R\,\mathbf{F}(\mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\},\ \forall R \in SO(3). \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ è della forma (4.1) allora si verifica facilmente che vale (4.2), in quanto si ha $|R\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| = \rho$ per ogni $R \in SO(3)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Assumiamo adesso che valga (4.2). Mostriamo prima che $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ esiste $R_{\mathbf{x}} \in SO(3) \setminus \{I\}$ tale che $R_{\mathbf{x}}\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Inoltre, per le proprietà delle rotazioni, se $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{y} \times \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ si ha $\mathbf{y} \times R_{\mathbf{x}}\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Usando la (4.2) abbiamo che $R_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(R_{\mathbf{x}}\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, quindi necessariamente si ha $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Per dimostrare che $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\,\frac{\mathbf{x}}{\rho}$ per una qualche funzione scalare $f(\rho)$, cioè che il campo di forze è a simmetria sferica, basta mostrare che

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \neq \mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y}$$

per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ con $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$. Scelta $R \in SO(3)$ tale che $R\mathbf{x} = \mathbf{y}$, e usando (4.2) si ha

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F}(R\mathbf{x}) \cdot R\mathbf{x} = R\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot R\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}.$$

$\square$

Osserviamo che in questo caso le equazioni di Newton $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ sono invarianti solo rispetto ad alcune trasformazioni di Galileo, quelle del tipo g_3, ma non lo sono rispetto alle traslazioni dell'origine, che corrisponde al centro di forza. Quindi nel caso di forze centrali non vale il principio di relatività di Galileo.

Osserviamo anche che i campi di forze centrali $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\,\frac{\mathbf{x}}{\rho}$ sono conservativi, con energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\rho(\mathbf{x})), \qquad \mathcal{V}(\rho) = -\int f(\rho)\,d\rho.$$

4.1 Riduzione del numero dei gradi di libertà

Considero il moto di un punto materiale di massa m in un campo di forze centrali $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$.

Dalla relazione $\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O = \mathbf{0}$ abbiamo la conservazione del momento angolare $\mathbf{M}_O$ rispetto al centro di forze O.

Inoltre si conserva l'energia totale $E = T + V$, dove V è l'energia potenziale della forza centrale.

Dimostriamo innanzitutto il seguente:

Proposizione 15. $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ *se e solo se il moto si svolge su una retta passante per* O*.*

Dimostrazione. $\mathbf{M}_O = m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, quindi posso trovare un vettore unitario $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{x}(0) = \rho_0\mathbf{e}$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\rho}_0\mathbf{e}$. Se $t \to \rho(t)$ è la soluzione del problema di Cauchy $m\ddot{\rho} = f(\rho), \rho(0) = \rho_0, \dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0$ allora $\mathbf{x}(t) = \rho(t)\mathbf{e}$ è la soluzione di $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, con dati iniziali $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$. Viceversa, se il moto avviene lungo una retta passante per O allora $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)$ sono sempre paralleli, quindi $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$.

□

Assumiamo adesso che $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$. Si usa la conservazione del momento angolare $\mathbf{M}_O$ per ridurci ad un problema unidimensionale. L'invarianza della direzione di $\mathbf{M}_O$ ci dice che il moto si svolge su un piano fisso π_O (che dipende dalle condizioni iniziali). Possiamo ruotare il sistema di riferimento $O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ introdotto in modo che $\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{M}_O$.

Introduco coordinate polari ρ, θ nel piano π_O, definite da

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\mathbf{x}}{\rho} = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2.$$

Introduco anche il vettore

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_\rho = -\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2$$

ed osservo che valgono le relazioni

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot\theta \mathbf{e}_\theta, \qquad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot\theta \mathbf{e}_\rho.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{x} = \rho \mathbf{e}_\rho, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \dot\rho \mathbf{e}_\rho + \dot\theta \rho \mathbf{e}_\theta, \qquad \ddot{\mathbf{x}} = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta)\mathbf{e}_\theta.$$

Proietto l'equazione di Newton lungo $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$:

$$m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = f(\rho), \qquad m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0. \tag{4.3}$$

La seconda equazione in (4.3) rappresenta la conservazione della terza componente del momento angolare

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3 = \rho \mathbf{e}_\rho \times m(\dot\rho \mathbf{e}_\rho + \rho\dot\theta \mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{e}_3 = m\rho^2\dot\theta,$$

infatti

$$m\rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot\theta).$$

Fissiamo un valore di tale integrale:

$$m\rho^2\dot\theta = c. \tag{4.4}$$

Sostituendo $\dot\theta = \frac{c}{m\rho^2}$ nella prima equazione in (4.3) ci riduciamo al sistema unidimensionale:

$$m\ddot\rho = -\frac{d}{d\rho}V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho), \qquad V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}. \tag{4.5}$$

La funzione $V_{\text{eff}}^{(c)}$ si dice energia potenziale efficace. Il sistema (4.5) ha l'integrale primo

$$E_{\text{eff}}^{(c)}(\rho, \dot\rho) = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho),$$

che corrisponde all'energia totale $E = T + V$ scritta come funzione di $\rho, \theta, \dot\rho, \dot\theta$ con la condizione (4.4):

$$E|_{\dot\theta = \frac{c}{m\rho^2}} = \left[\frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2) + V(\rho)\right]\Bigg|_{\dot\theta = \frac{c}{m\rho^2}} = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{c^2}{2m\rho^2} + V(\rho) = E_{\text{eff}}^{(c)}.$$

4.2 Legge delle aree

Dalla conservazione del momento angolare si ha che, se $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$, θ è monotona, quindi può essere utilizzata come variabile indipendente per descrivere la traiettoria. Infatti se $c \neq 0$, allora $\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2}$ ha lo stesso segno di c.

Sia $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\theta_0, \theta)$ l'insieme descritto dal raggio vettore quando l'angolo polare passa dal valore θ_0 a θ. L'area di questo insieme è

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\theta_0}^{\theta} \int_{0}^{\rho(\theta')} \rho' \, d\rho' \, d\theta' = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \rho^2(\theta') \, d\theta',$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\mu(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta},$$

quindi la conservazione della terza componente del momento angolare $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3$ corrisponde alla conservazione della velocità areolare (legge delle aree).

4.3 Formula di Binet

Consideriamo un punto materiale che si muove in un piano in cui mettiamo coordinate polari (ρ, θ). Assumiamo che valga la legge delle aree: $\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \alpha$, con $\alpha \neq 0$. Queste ipotesi valgono in particolare nel caso dei moti centrali.

Allora la componente radiale dell'accelerazione è

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \right). \tag{4.6}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{d\rho}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{2\alpha}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta} = -2\alpha \frac{d}{d\theta}\Big(\frac{1}{\rho}\Big), \\ \ddot{\rho} &= \dot{\theta}\frac{d\dot{\rho}}{d\theta} = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{\rho}\Big), \end{aligned}$$

per cui, usando la formula $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ si ottiene (4.6).

4.4 Traiettoria del moto

Fissate le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$, per determinare il comportamento qualitativo della traiettoria nel piano del moto, con coordinate polari (ρ, θ), si utilizzano le leggi di conservazione

$$m\rho^2\dot{\theta} = c, \qquad \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = E, \tag{4.7}$$

in cui c, E sono i valori delle quantità conservate al tempo iniziale $t = 0$. Se $c \neq 0$ allora possiamo descrivere la traiettoria attraverso un mappa $\theta \mapsto \rho(\theta)$. Dalle (4.7) si ottiene

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm\frac{m\rho^2}{c}\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)]}.$$

Siano ρ_{min}, ρ_{max} due soluzioni consecutive di $V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = E$, con $0 < \rho_{min} < \rho_{max} < +\infty$, e tali che

$$\frac{d}{d\rho}V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho_{min}), \frac{d}{d\rho}V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho_{max}) \neq 0.$$

Assumiamo inoltre che esista $\bar{\rho} \in (\rho_{min}, \rho_{max})$ con $V_{\text{eff}}^{(c)}(\bar{\rho}) < E$, cioè che esistano dei moti con energia E e valori di ρ nell'intervallo $[\rho_{min}, \rho_{max}]$. Allora possiamo definire l'**angolo di avanzamento** del pericentro

$$\Delta\theta = c\sqrt{\frac{2}{m}}\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{1}{\rho^2\sqrt{E - V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)}}d\rho. \tag{4.8}$$

In questo caso, nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ ho un'orbita periodica di periodo

$$T_\rho = \sqrt{2m}\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{1}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)}}d\rho.$$

La condizione per avere una traiettoria periodica nel piano del moto è che

$$\frac{\Delta\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Dimostriamo adesso la seguente

Proposizione 16. *In generale la corona circolare* $\mathcal{C} = \{(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{max}\}$ *viene riempita in modo ovunque densa.*

Dimostrazione. Tutti i valori di ρ nell'intervallo $[\rho_{min}, \rho_{max}]$ vengono raggiunti periodicamente. Fissiamo una circonferenza C_ρ centrata in O e di raggio $\rho \in [\rho_{min}, \rho_{max}]$. Dimostriamo, seguendo [4], che in generale $\mathcal{C}_\rho$ viene riempito in modo ovunque denso.

Definiamo la mappa

$$\phi : C_\rho \to C_\rho, \qquad \phi(\rho e^{i\theta}) \mapsto \rho e^{i(\theta+\Delta\theta)}$$

dove $\Delta\theta$ è l'angolo di avanzamento del pericentro.

Se $\Delta\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$ allora i punti $\{\phi^m(x)\}_m$, con $x = \rho e^{i\theta}$, sono tutti distinti. Siccome C_ρ è compatto c'è almeno un punto di accumulazione, quindi per ogni $\epsilon > 0$ esistono interi positivi n, m, con $n > m$, tali che

$$d(\phi^n(x), \phi^m(x)) < \epsilon.$$

Inoltre la mappa ϕ conserva la distanza tra due punti, quindi

$$d(\phi^{n-m}(x), x) = d(\phi^n(x), \phi^m(x)) < \epsilon.$$

posto $k = n - m$ otteniamo una successione

$$x, \phi^k(x), \phi^{2k}(x), \phi^{3k}(x), \dots$$

di punti distinti su C_ρ che sono equidistanti e due consecutivi di essi distano meno di ϵ. Si conclude usando l'arbitrarietà di ϵ.

$\square$

4.5 Riduzione del problema dei 2 corpi

Studiamo il moto di due punti materiali di massa m_1, m_2 soggetti alla loro interazione mutua dovuta a forze interne di tipo classico. Le equazioni del moto sono

$$m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1, \qquad m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_2$$

dove

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\\
&\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}\\
&\mathbf{F}_j \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}\\
&\mathbf{F}_j = f_j(\rho)\frac{\mathbf{r}}{\rho}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2,\ \rho = |\mathbf{r}|
\end{aligned}$$

per $j = 1, 2$.

Il cambiamento di coordinate

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto (\mathbf{x}_B, \mathbf{r})$$

definito dalle relazioni

$$\mathbf{x}_B = \frac{1}{m}(m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2), \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

disaccoppia le equazioni di Newton:

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{0}, \qquad \mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \tag{4.9}$$

in cui $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, $m = m_1 + m_2$. Possiamo quindi studiare il problema di moto centrale, dato dalla seconda delle (4.9) e poi ricostruire la soluzione tramite le relazioni

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_B = \frac{m_2}{m}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_B = -\frac{m_1}{m}\mathbf{r}. \tag{4.10}$$

Osservazione 11. *Dalle (4.10) si vede che le traiettorie nel riferimento del centro di massa si ottengono per similitudine da quelle del moto relativo, soluzione di un problema di moto centrale.*

Osservazione 12. *Nel caso della forza di attrazione gravitazionale di Newton si ha* $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^3}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$, *con* G *la costante di gravitazione universale, per cui, utilizzando la relazione* $m\mu = m_1 m_2$, *si ottiene* $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm\mu}{\rho^3}\mathbf{r}$, *con* $\rho = |\mathbf{r}|$. *In questo modo il problema del moto centrale (cioè la seconda delle (4.9)) si scrive*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -Gm\frac{\mathbf{r}}{\rho^3}.$$

4.6 Il problema di Keplero

Tycho Brahe (1546 - 1601): misura delle posizioni dei pianeti a meno di 1 minuto di arco (=1/60 grado) prima dell'invenzione del telescopio.

Johannes Kepler (1571 - 1630): collabora con Tycho a Praga nel 1601

Leggi di Keplero

1) i pianeti descrivono delle ellissi di cui il Sole occupa uno dei 2 fuochi;
2) il raggio vettore che congiunge un pianeta al Sole descrive aree uguali in tempi uguali;
3) i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi, cioè $\frac{T^2}{a^3}$ è una costante, che è la stessa per tutti i pianeti.

In *Astronomia Nova* (1609) appaiono le prime due leggi. La terza si trova in *Harmonices Mundi* (1619).

Problema di Keplero

i) *problema diretto*: dato il campo di forze calcolare i moti possibili;
ii) *problema inverso*: dati i moti possibili calcolare il campo di forze.

Entrambi i problemi sono stati risolti da Newton (*Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* (1687)).

4.6.1 Problema diretto

Posto

$$k = GmM, \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad M = m_1 + m_2,$$

considero il moto centrale dato dalle equazioni

$$m\ddot{\mathbf{x}} = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad f(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}$$

con $\rho = |\mathbf{x}|$, $k > 0$ e con condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$. La forza centrale ammette l'energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{k}{\rho}.$$

Sia $c = m\rho^2\dot{\theta}$ il valore del momento angolare che corrisponde alle condizioni iniziali. Essendo il moto centrale, si ha la legge delle aree, che rappresenta la conservazione del momento angolare $m\rho^2\dot{\theta}$ e ci dà la seconda legge di Keplero.

Proiettando l'equazione di Newton in direzione radiale $\mathbf{e}_\rho$ ed usando la formula di Binet si ottiene l'equazione per la componente radiale della forza:

$$-\frac{4mc^2}{\rho^2}\Big[\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{\rho}\Big) + \frac{1}{\rho}\Big] = -\frac{k}{\rho^2}$$

dove $\alpha = \frac{c}{2m}$ è la costante delle aree. Ponendo $p = \frac{4m\alpha^2}{k}$ e usando la variabile $u = 1/\rho$ si ottiene l'equazione lineare

$$u'' + u = \frac{1}{p} \tag{4.11}$$

dove $'$ indica la derivata rispetto a θ. L'equazione (4.11) ha come soluzione generale

$$u(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p}$$

con $A > 0$, $\theta_0 \in S^1$. Introducendo il parametro $e = Ap$ si ha l'equazione di una conica in coordinate polari

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}. \tag{4.12}$$

p, e IN FUNZIONE DI c, E

Dalla relazione $\alpha = \frac{c}{2m}$ si ottiene subito

$$p = \frac{c^2}{mk}. \tag{4.13}$$

Il valore minimo di ρ lungo la traiettoria definita da (4.12) è dato da

$$\rho_{min} = \frac{p}{1+e} \tag{4.14}$$

che è un punto di inversione del moto per la variabile ρ, cioè

$$E - V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho_{min}) = 0, \tag{4.15}$$

dove

$$V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

è l'energia potenziale efficace del problema di Keplero. Sostituendo le relazioni (4.13), (4.14) nella (4.15) si ha

$$\begin{aligned} 0 &= E + \frac{k}{\rho_{min}} - \frac{c^2}{2m\rho_{min}} = E + \frac{k^2 m(1+e)}{c^2} - \frac{c^2 m^2 k^2 (1+e)^2}{2mc^4} = \\ &= E + \frac{mk^2(1+e)}{c^2}\Big(1 - \frac{1+e}{2}\Big) = E + \frac{mk^2(1-e^2)}{2c^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$e^2 = 1 + \frac{2Ec^2}{mk^2}. \tag{4.16}$$

Dalla (4.16) si ottiene che

$$\begin{array}{lcll} E < 0 & \Leftrightarrow & e < 1 & \text{orbite ellittiche} \\ E = 0 & \Leftrightarrow & e = 1 & \text{orbite paraboliche} \\ E > 0 & \Leftrightarrow & e > 1 & \text{orbite iperboliche} \end{array}$$

Inoltre dalla relazione $mk^2 + 2Ec^2 \geq 0$ segue che non tutte le coppie (c, E) sono ammissibili (vedi Figura 4.6.1).

Periodo delle orbite ellittiche

Sia T il periodo di un'orbita ellittica che corrisponde ai valori $c, E(< 0)$ del momento angolare e dell'energia.

Valgono le relazioni seguenti, che legano semiasse maggiore a, semiasse minore b ai parametri p, e e quindi ai valori di c, E:

$$p = a(1 - e^2), \qquad b = a\sqrt{1 - e^2},$$

per cui

$$p = \frac{b^2}{a}, \qquad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

L'area dell'ellisse è

$$\pi ab = \pi a\sqrt{ap} = \pi a^{3/2}\frac{c}{\sqrt{mk}}$$

e la velocità areale è

$$\alpha = \frac{c}{2m},$$

per cui

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^3 c^2}{mk}\frac{4m^2}{c^2} = \frac{4\pi^2 m}{k}a^3$$

che rappresenta la terza legge di Keplero.

La costante di proporzionalità è quindi $\frac{4\pi^2 m}{k} = \frac{4\pi^2}{GM}$, con $M = m_1 + m_2$. Si può assumere che M, che è la massa del Sole più quella di un pianeta, non dipenda dal pianeta. L'errore relativo che si commette è dell'ordine di 10^{-3} (rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole).

4.6.2 Il vettore di Laplace-Lenz

$$\mathbf{L} = \mathbf{p}\times\mathbf{M}_O - mk\frac{\mathbf{x}}{\rho} \tag{4.17}$$

Mostriamo che $\mathbf{L}$ è un integrale primo per il moto centrale con energia potenziale di Keplero $V(\rho) = -\frac{k}{\rho}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{L}} &= \dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{M}_O + \mathbf{p}\times\mathbf{N}_O - mk\Big[\frac{\mathbf{v}}{\rho} - \frac{\mathbf{x}}{\rho^2}\frac{d}{dt}(\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}})\Big] = \\
&= \Big(-\frac{k\mathbf{x}}{\rho^3}\Big)\times(\mathbf{x}\times m\mathbf{v}) + m\mathbf{v}\times\Big[\mathbf{x}\times\Big(-\frac{k\mathbf{x}}{\rho^3}\Big)\Big] - \frac{mk}{\rho}\mathbf{v} + \frac{mk}{\rho^2}\mathbf{x}\Big(\frac{2\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{2\rho}\Big) = \\
&= -\frac{km}{\rho^3}[(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{x} - \rho^2\mathbf{v}] - \frac{mk}{\rho}\mathbf{v} + \frac{mk}{\rho^3}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{x} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo adesso la norma di L.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} &= \Big(\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O - mk\frac{\mathbf{x}}{\rho}\Big)\cdot\Big(\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O - mk\frac{\mathbf{x}}{\rho}\Big) = \\
&= |\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O|^2 - 2\frac{mk}{\rho}\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{x} + m^2k^2 = \\
&= |\mathbf{p}|^2[|\mathbf{p}|^2\rho^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})^2] - 2\frac{mk}{\rho}[|\mathbf{p}|^2\rho^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})^2] + m^2k^2,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O = \mathbf{p}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2\mathbf{x} - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\mathbf{p},$$

da cui

$$\begin{aligned} |\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O|^2 &= |\mathbf{p}|^2[\mathbf{p}|^2\rho^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})^2], \\ \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{p}|^2\rho^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})^2. \end{aligned}$$

Usando la relazione

$$\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_O = |\mathbf{M}_O|^2 = c^2$$

e l'energia cinetica T si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\cdot\mathbf{L} &= c^2\Big(|\mathbf{p}|^2 - 2\frac{mk}{\rho}\Big) + m^2k^2 = c^2\Big(2mT - 2\frac{mk}{\rho}\Big) + m^2k^2 = \\ &= 2mEc^2 + m^2k^2 = m^2k^2\Big(1 + 2\frac{Ec^2}{mk^2}\Big) = m^2k^2e^2. \end{aligned}$$

Concludo la norma del vettore di Lenz è il prodotto di mk e dell'eccentricità e.

Denotiamo con ψ l'angolo tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{L}$. Si ha allora

$$e\cos\psi = \frac{\mathbf{L}}{mk}\cdot\frac{\mathbf{x}}{\rho} \quad = \quad \frac{\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{x}}{mk\rho} - 1 = \frac{c^2}{mk\rho} - 1.$$

Usando la (4.13) si ottiene

$$1 + e\cos\psi = \frac{p}{\rho}$$

e si ritrova l'equazione della traiettoria in forma polare (4.12) con l'angolo ψ al posto di $\theta - \theta_0$. Ne segue che $\mathbf{L}$ deve indicare la direzione del pericentro, che corrisponde a $\theta = \theta_0$.

4.6.3 Problema inverso

Se valgono le leggi di Keplero, l'accelerazione di ogni pianeta è sempre diretta verso il Sole ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza da esso. Inoltre la costante di proporzionalità è la stessa per tutti i pianeti.

Il fatto che il moto sia piano e la velocità aerale costante implica che l'accelerazione sia puramente radiale.

Sostituiamo l'equazione della traiettoria

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

nella formula di Binet:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\rho = -\frac{4c^2}{\rho^2}\Big[\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{\rho}\Big) + \frac{1}{\rho}\Big] = -\frac{4c^2}{\rho^2}\Big(-\frac{e\cos\theta}{p} + \frac{1 + e\cos\theta}{p}\Big) = -\frac{4c^2}{p}\frac{1}{\rho^2}.$$

Quindi l'accelerazione radiale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole e la costante di proporzionalità è $-4c^2/p$.

Scegliamo un'orbita ellittica. Siano T, a, b periodo e semiassi maggiore e minore di quest'orbita. Dalla formula $c = \frac{\pi ab}{T}$ si ottiene

$$\frac{4c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \frac{a}{b^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

che per la terza legge di Keplero è la stessa costante per ogni pianeta.

Vedremo nella Sezione 4.7 che solo due tipi di forze centrali, quelle dell'oscillatore armonico e del problema di Keplero, sono tali che tutte le orbite limitate con momento angolare non nullo sono periodiche.

4.7 Teorema di Bertrand

In [7] J. Bertrand espone il seguente suggestivo risultato:

'Parmi les lois d'attraction qui supposent l'action nulle à une distance infinie, celle de la nature est la seule pour laquelle un mobile lancé *arbitrairement* avec une vitesse inférieure à une certaine limite, et attiré vers un centre fixe, décrive nécessairement autour de ce centre une courbe fermée. Toutes le lois d'attraction *permettent* des orbites fermées, mais la loi de la nature est la seule qui les *impose*.' [1]

Diamo un enunciato più formale:

Teorema 2. *(Bertrand) Se ho un campo di forze centrale attrattivo* $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$*,* $\rho = |\mathbf{x}|$*, con* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *analitica ed* $f(\rho) < 0$*, tale che tutte le orbite non rettilinee e limitate siano chiuse, allora*

$$f(\rho) = -\frac{A}{\rho^2} \qquad \textit{oppure} \qquad f(\rho) = -A\rho$$

per una costante $A > 0$*.*

Dimostrazione. Essendo la forza attrattiva, una traiettoria rettilinea deve per forza passare per l'origine, quindi se considero traiettorie non rettilinee queste hanno necessariamente momento angolare non nullo, per la Proposizione 15.

[1] 'Tra le leggi di attrazione che assumono azione nulla a distanza infinita, quella della natura è la sola per la quale un corpo, lanciato *arbitrariamente*, con una velocità inferiore a un certo limite, e attirato verso un centro fisso, descrive necessariamente attorno a questo centro una curva chiusa. Tutte le leggi di attrazione *permettono* orbite chiuse, ma la legge della natura è la sola che le *impone*'.

Dalla formula di Binet si ha

$$f(\rho) = -\frac{k^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right] \qquad \text{con} \quad k^2 = 4mc^2.$$

Quindi $c = k/\sqrt{m}$. Ponendo $z = 1/\rho$ e $\psi(z) = -\rho^2 f(\rho)|_{\rho=1/z}$ si ottiene

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2}\psi(z) = 0. \tag{4.18}$$

Moltiplicando per $\frac{dz}{d\theta}$ ed integrando rispetto a θ

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2}w(z) - h = 0$$

per una costante h, con $w(z) = 2\int \psi(z)dz$.

Ricaviamo la relazione che lega h, k^2 all'energia E. Dalle relazioni

$$w(z) = -2\int \frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big)dz = 2\int f\Big(\frac{1}{z}\Big)d\Big(\frac{1}{z}\Big) = -2V\Big(\frac{1}{z}\Big),$$

con $-\nabla_{\mathbf{x}} V(\rho) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ e

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]^2 = \left[-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}\right]^2 = \frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2, \quad \text{con} \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\dot\rho}{\dot\theta} = \dot\rho\rho^2\frac{\sqrt{m}}{k},$$

si ottiene

$$h = \frac{2}{k^2}\left(\frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{k^2}{2\rho^2} + V(\rho)\right) = \frac{2E}{k^2}.$$

Osserviamo che l'ipotesi che la forza sia attrattiva implica l'esistenza di orbite circolari di raggio z_c per ogni scelta di $z_c > 0$: infatti queste corrispondono ad equilibri del sistema newtoniano $\frac{d^2z}{d\theta^2} = \phi_k(z)$ con $\phi_k(z) = \frac{1}{k^2}\psi(z) - z$ e per ogni $z_c > 0$ possiamo trovare k tale che $\phi_k(z_c) = 0$. In particolare si ottiene che l'insieme delle orbite limitate non è vuoto.[2]

Mostriamo adesso, seguendo [1], che se tutte le orbite non rettilinee e limitate sono chiuse possiamo trovare un intervallo aperto non vuoto di valori di z corrispondenti ad orbite circolari stabili.[3] Data un'orbita circolare con $z = z_c$, se $\phi_k'(z_c) < 0$ questa è un minimo non degenere dell'energia potenziale $\mathcal{V}(z) = -\int \phi_k(z)dz$ e l'orbita

[2]In realtà per quanto segue basterebbe l'ipotesi che $f(\rho)$ assuma dei valori negativi. Se $f(\rho) > 0$ per ogni ρ allora non ci sono orbite limitate, quindi qualunque funzione $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ analitica e positiva soddisfa le ipotesi del teorema.

[3]Diciamo che l'orbita circolare di raggio z_c è stabile se z_c è un punto di equilibrio stabile di $\frac{d^2z}{d\theta^2} = \phi_k(z)$

circolare è stabile. Nell'ipotesi che tutte le orbite non rettilinee e limitate siano chiuse non è possibile che $\phi_k'(z_c) > 0$ oppure che $\phi_k'(z)$ sia identicamente nulla in un intorno di z_c. Infatti nel primo caso, analizzando il comportamento della separatrice instabile del sistema $\frac{dz}{d\theta} = v, \frac{dv}{d\theta} = \phi_k(z)$, si dimostra che c'è un'orbita limitata asintotica all'equilibrio z_c, che quindi non può essere chiusa. Nel secondo caso, per l'analiticità si ha $\phi_k'(z) \equiv 0$ e dunque

$$\psi'(z) = k^2, \qquad \psi(z) = k^2 z + A \ (A > 0), \qquad f(\rho) = -\frac{k^2}{\rho^3} - \frac{A}{\rho^2}.$$

In questo caso esistono orbite non rettilinee limitate che non sono chiuse, infatti la forza efficace risulta semplicemente $f_e(\rho) = -\frac{A}{\rho^2}$ e l'energia potenziale efficace è $V_e(\rho) = -\frac{A}{\rho}$. Quindi se $E < 0$ le orbite sono limitate e doppiamente asintotiche all'origine.

Infine, se z_c è uno zero isolato di $\phi_k'(z)$ si può prendere un valore di $\tilde{z}_c$ vicino a z_c corrispondente ad un'orbita circolare con $\phi_k'(\tilde{z}_c) < 0$.

Osserviamo che le equazioni

$$\phi_k(z) = 0, \qquad \phi_k'(z) = 0,$$

non possono essere soddisfatte per valori (z, k) che formano un continuo. Infatti, dalla definizione di ϕ_k, in tal caso si avrebbe

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{1}{z}$$

che integrata ci dà $\psi(z) = Az$, con $A > 0$. Ma allora $\phi_k'(z) = \frac{A}{k^2} - 1$, per cui se è nullo per una coppia (k, z_c) allora è identicamente nullo.

Quindi, in virtú delle ipotesi fatte, possiamo trovare un intervallo aperto non vuoto di valori di z corrispondenti ad orbite limitate, che in alcuni casi sono orbite circolari stabili. Queste orbite corrispondono a certi valori di k^2, h e quindi di c, E: per ciascuna di queste chiamiamo $\alpha = z_{min}, \beta = z_{max}$ i valori minimo e massimo di z, che corrispondono a tali valori degli integrali primi c, E.

Abbiamo quindi che, $\forall \alpha, \beta$ in un intervallo aperto non vuoto $\mathcal{J}$, con $0 < \alpha < \beta$, l'angolo di avanzamento dal pericentro all'apocentro è dato da

$$\Delta\theta = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2} w(z) - z^2}}.$$

Poichè le orbite considerate sono chiuse, si deve avere $\Delta\theta = q\pi$, con $q \in \mathbb{Q}$.

Calcoliamo la relazione che lega h, k^2 ad α, β. Osservo che questi ultimi sono valori di inversione, quindi

$$h + \frac{1}{k^2} w(\alpha) - \alpha^2 = 0, \qquad h + \frac{1}{k^2} w(\beta) - \beta^2 = 0,$$

da cui

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{w(\beta) - w(\alpha)}, \qquad h = \frac{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha)}{w(\beta) - w(\alpha)}.$$

Otteniamo che deve valere la relazione

$$q\pi = I(\alpha, \beta) \tag{4.19}$$

con

$$I(\alpha, \beta) := \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{w(\beta) - w(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2) w(z) - z^2 (w(\beta) - w(\alpha))}} dz \tag{4.20}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{J}$, con $0 < \alpha < \beta$, quindi q deve essere costante poichè $\mathbb{Q}$ è un insieme totalmente sconnesso.

Selezioniamo in due passi i potenziali ammissibili, che soddisfano (4.19). Il primo passo consiste nel considerare traiettorie con α, β molto vicini e passare al limite per $\beta \to \alpha$. Consideriamo un valore di $\alpha \in \mathcal{J}$ e poniamo $\beta = \alpha + u$, $z = \alpha + y$. Calcoliamo $\lim_{u \to 0} I(\alpha, \alpha + u)$ tramite la formula di Taylor:

$$w(\beta) - w(\alpha) = w'(\alpha) u + \frac{1}{2} w''(\alpha) u^2 + o(u^2),$$

inoltre

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2) w(z) - z^2 (w(\beta) - w(\alpha)) = \\
= \; & \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2) \left[w(\alpha) + w'(\alpha) y + \frac{1}{2} w''(\alpha) y^2 + o(y^2) \right] - \\
- \; & (\alpha^2 + 2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) = \\
= \; & (\beta^2 - \alpha^2)[w'(\alpha) y + \frac{1}{2} w''(\alpha) y^2] - (2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) + o(u^3) = \\
= \; & (u - y) u y (w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)) + o(u^3).
\end{aligned}$$

Ottengo quindi che

$$\begin{aligned}
& \lim_{u \to 0} I(\alpha, \alpha + u) = \frac{\sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}} \lim_{u \to 0} (1 + o(1)) \int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} = \\
= \; & \frac{\pi \sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}},
\end{aligned}$$

infatti, usando il cambio di variabili $x = \sqrt{uy - y^2}$, si ha

$$\int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} = \frac{2}{u} \int_{-u/2}^{u/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 4\frac{x^2}{u^2}}} = \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \pi.$$

In particolare l'ultimo integrale è indipendente da u. Elevando al quadrato si ottiene che w deve soddisfare l'equazione differenziale

$$q^2 \alpha w''(\alpha) + (1 - q^2) w'(\alpha) = 0. \tag{4.21}$$

Ricordando la definizione di $w(z)$ si ottiene l'equazione a variabili separate

$$q^2 z \psi'(z) + (1 - q^2)\psi(z) = 0. \tag{4.22}$$

Se $q^2 = 1$, dalla (4.22) si ha $\psi(z) = A$ e dunque

$$w(z) = 2Az + B, \tag{4.23}$$

con A, B costanti di integrazione ($A > 0$). Se $q^2 \neq 1$, ponendo $\sigma = 1/q^2$ abbiamo

$$\log \psi = \log z^{1-\sigma} + \log A, \qquad A > 0$$

e, passando agli esponenziali, $\psi(z) = Az^{1-\sigma}$, per cui

$$w(z) = \frac{2A}{2 - \sigma} z^{2-\sigma} + B, \qquad B \in \mathbb{R}, \tag{4.24}$$

che per $\sigma = 1$ si riduce alla (4.23). Secondo passo: sostituendo l'espressione (4.24) di $w(z)$ con $B = 0$ in (4.20) si ha

$$I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma}}}{\sqrt{\alpha^2 \beta^{2-\sigma} - \beta^2 \alpha^{2-\sigma} + (\beta^2 - \alpha^2) z^{2-\sigma} - z^2(\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma})}} dz. \tag{4.25}$$

A questo punto passiamo al limite per $\alpha \to 0$, $\beta \to 1$ in (4.25). Distinguiamo due casi: a) $2 - \sigma > 0$; b) $2 - \sigma < 0$.[4] Nel caso a), usando la sostituzione $\zeta = z^{\sigma/2}$, otteniamo

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^{2-\sigma}(1 - z^\sigma)}} = 2q^2 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = q^2 \pi,$$

quindi $q = 1$, $\psi(z) = A$ ed $f(\rho) = -A/\rho^2$. Nel caso b) invece

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\pi}{2},$$

quindi $q = \frac{1}{2}$, $\psi(z) = Az^{-3}$ ed $f(\rho) = -A\rho$.

□

[4] Osservo che in entrambi i casi α, β possono assumere tutti i valori reali con $0 < \alpha < \beta < 1$. Infatti, posto $\mathcal{V}(z) = -\int \phi_k(z) dz = z^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{Az^{-\sigma}}{k^2(2-\sigma)}\right]$ e scelti arbitrariamente α, β con $0 < \alpha < \beta < 1$, possiamo trovare dei valori di k^2, h tali che α, β siano zeri consecutivi di $E - \mathcal{V}(z)$.